

## TD 11 Calcul matriciel

**Exercice 1** Méthode 1, à l'intuition. Soit pour  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A(\theta)^n$ .

**Exercice 2** Méthode 2, par le binôme de Newton. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et soit  $B = A - I_3$ .

1. Calculer  $B^2, B^3$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , développer  $(B + I_3)^n$  à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. En déduire  $A^n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 3** Méthode 3, par la division euclidienne. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2 - 3A + 2I_2$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.
2. Pour  $n \geq 2$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .
3. En déduire l'expression de la matrice  $A^n$ .

**Exercice 4** Méthode 4, par diagonalisation. On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible et déterminer son inverse. Calculer  $P^{-1}AP$  et en déduire les puissances de la matrice  $A$ .

**Exercice 5** Dire si les matrices suivantes sont inversibles et donner leurs inverses le cas échéant.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 6** Résoudre en fonction du paramètre  $m \in \mathbb{C}$ , les systèmes d'inconnues complexes suivants :

$$a) \begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

### Pour aller plus loin

**Exercice 7** Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ . On pose

$$A = \left( \omega^{(k-1)(l-1)} \right)_{1 \leq k, l \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Calculer  $A\bar{A}$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

**Exercice 8** Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore une matrice symétrique.

**Exercice 9** Montrer que toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

**Exercice 10** Discuter des solutions et résoudre suivant les valeurs de  $\lambda, a, b, c, d$  le système suivant :

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x + y + z + t = a \\ x + (1 + \lambda)y + z + t = b \\ x + y + (1 + \lambda)z + t = c \\ x + y + z + (1 + \lambda)t = d \end{cases}$$

### Rab

**Exercice 11** Calculer les expressions suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times (4 \quad -5) \quad B = \left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = (1+i \quad 2-i \quad i) \times \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ 1 & i \\ -i & 1+3i \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Exercice 12} \quad \text{Soit } G = \left\{ \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer  $G$  est stable par produit.
2. Montrer que les matrices de  $G$  commutent.
3. Montrer que les matrices de  $G$  sont inversibles et que leurs inverses sont encore des éléments de  $G$ .

**Exercice 13** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2$  et vérifier que  $A^2 = A + 2I_3$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 14** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(x) & \operatorname{sh}(x) \\ \operatorname{sh}(x) & \operatorname{ch}(x) \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 15** On considère la matrice  $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Vérifier que  $(M-I)(M+3I) = 0$ . En déduire  $M^n$ .

**Exercice 16** On considère dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice  $J$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer  $J^2$  puis déterminer les puissances de  $J$ .
2. En déduire à l'aide de la formule du binôme de Newton, les puissances de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 17

1. Trouver toutes les matrices  $A$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $A^2 = A$ .
2. Trouver toutes les matrices  $B$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $B^2 = I_2$ .

**Exercice 18** Soit  $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position  $(i, j)$  qui vaut 1. Pour tous les indices  $i, j, k, l$  de  $\{1, \dots, n\}$ , calculer  $E_{ij}E_{kl}$ .

**Exercice 19** Appliquer l'algorithme de Gauss aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} i & i & i & i & i & i \\ 1-i & 1 & 1-i & 1 & 1-i & 1 \\ 2i & 1 & 2 & -1 & i & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 20** Echelonner la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & \lambda \end{pmatrix}$$

**Exercice 21** Dire si les matrices suivantes sont inversibles et donner leurs inverses le cas échéant.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 22** Calculer l'inverse de  $\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & 1 & a & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 23** Résoudre en fonction du paramètre  $m \in \mathbb{C}$ , les systèmes d'inconnues complexes suivants :

$$a) \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + (1-m) = m + 2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m + 2 \end{cases}$$