

TD12

Analyse asymptotique

Exercice 1 Classer les suites dont les termes généraux sont les suivants par ordre de négligeabilité.

$$1. \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln(n)}{n}, \frac{\ln n}{n^2}, \frac{1}{n \ln(n)}$$

$$2. n, n^2, n \ln(n), \sqrt{n} \ln(n), \frac{n^2}{\ln(n)}$$

Exercice 2 Déterminer les développements limités suivants :

- | | |
|---|---|
| 1. DL ₅ (0) de $x \mapsto \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch}(x)$ | 2. DL ₃ (0) de $x \mapsto \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$ |
| 3. DL ₂ (0) de $x \mapsto (1+x)^{1/x}$ | 4. DL ₃ (0) de $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$ |
| 5. DL ₃ ($\pi/4$) de $x \mapsto \sin(x)$ | 6. DL ₄ (1) de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ |
| 7. DL ₃ (0) de $x \mapsto \ln(2+\sin(x))$ | 8. DL ₃ (0) de $x \mapsto \sqrt{3+\cos(x)}$ |
| 9. DL ₃ (0) de $x \mapsto \ln(1+e^x)$ | 10. DL ₃ ($\frac{\pi}{3}$) de $x \mapsto \cos(x)$ |
| 11. DL ₃ (0) de $x \mapsto \ln(1+\sin(x))$ | 12. DL ₃ (1) de $x \mapsto \cos(\ln(x))$ |

Exercice 3 Trouver un équivalent simple des suites suivantes.

$$1. u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}$$

$$2. u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1}$$

$$3. u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

$$4. u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$5. u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$6. u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$$

Exercice 4 Etudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué :

- | | |
|---|--|
| 1. $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ en 0. | 2. $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ au voisinage de 0. |
| 3. $x \mapsto 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$. | 4. $x \mapsto \frac{x}{1+e^x}$ en $+\infty$. |
| 5. $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^2}$ en 0. | 6. $x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$ sur \mathbb{R} . |

Exercice 5 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$1. u_n = n \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}$$

$$2. u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$3. u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$$

Pour aller plus loin

Exercice 6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0^+ puis déterminer un équivalent simple de u_n .

Exercice 7 Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le DL_{2n+2}(0) de $x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 8 Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.

1. Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$.
2. En déduire les fonctions f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

Rab

Exercice 9 Trouver un équivalent simple des suites suivantes.

$$1. u_n = \ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)$$

$$2. u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$3. u_n = \frac{2n^3 - \ln(n) + 1}{n^2 + 1}$$

$$4. u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

$$5. u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$$

$$6. u_n = \frac{(1-e^{1/n}) \sin \frac{1}{n}}{n^2 + n^3}$$

$$7. u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

Exercice 10 Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes en $+\infty$:

$$1. \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

$$2. \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$$

$$3. \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$$

$$4. \frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - 1$$

$$5. \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)}$$

$$6. x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x)$$

Exercice 11 Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes en 0

$$1. \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

$$2. \tan(x) - \sin(x)$$

$$3. e^x + x - 1$$

$$4. \ln(1 + \sin(x))$$

$$5. \ln(e+x)$$

$$6. \ln(\ln(1+x))$$

$$7. e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)}$$

$$8. \frac{\arctan(x^2-x^2 \cos x)}{1-\sqrt{\cos x}}$$

$$9. \ln^2(x+1) - \ln^2(1-x)$$

Exercice 12 Déterminer un équivalent de $\ln(\cos(x))$ en $(\pi/2)^-$

Exercice 13 A l'aide d'équivalents, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{-x} + x^2}{x - \ln(x)}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x) - x}{x + \cos(x)}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x e^x - x^2}}{e^x + e^{-x}}$

Exercice 14 Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{\ln(x)}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln(x)} \right)^{\frac{\ln(x)}{x}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin(x)}{x \ln(x)}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) + x^2}{\ln(x + x^2)}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$

Exercice 15 Etudier les branches infinies de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{|x - 1| + x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{(x + 1) \ln(x + 1)}{\ln(x)}.$$

Exercice 16 Déterminer les développements limités suivants :

1. $\text{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\frac{\text{sh}(x)}{x}\right)$

2. $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \ln(3 e^x + e^{-x})$

3. $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{1 + x})$

4. $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$

5. $\text{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{\tan(x)}$

6. $\text{DL}_2(1)$ de $x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$

7. $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

8. $\text{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\exp(x) - 1}$

9. $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{x \text{ch}(x) - \text{sh}(x)}{\text{ch}(x) - 1}$

10. $\text{DL}_4(1)$ de $x \mapsto e^x$

Exercice 17 A l'aide de développements limités, déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

1. $x \mapsto x(2 + \cos(x)) - 3 \sin(x)$

2. $x \mapsto x^x - (\sin(x))^x$

3. $x \mapsto \arctan(2x) - 2 \arctan(x)$

4. $\arctan \sqrt{1+x} - \arctan \sqrt{1-x}$

Exercice 18 A l'aide de développements limités, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{x^2}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$

Exercice 19 Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Préciser l'équation de la tangente en $x = 0$ et la position de cette tangente et de la courbe.

Exercice 20 On note f la fonction définie par $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{x^2}{\text{sh}(x)}.$$

1. Calculer un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R} et préciser la position relative au voisinage de 0 du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.
3. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?
4. Faire l'étude complète de f sur \mathbb{R} .

Exercice 21 Soit $f :]-1, 0[\cup]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0. Quelle est alors la position relative de la courbe f par rapport à sa tangente en ce point ?

Exercice 22 Soient f, g, h les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = x^x, \quad g(x) = x^{f(x)} \quad \text{et} \quad h(x) = x^{g(x)}$$

Déterminer les limites en 0 de ces trois fonctions.

Exercice 23 Etudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué :

1. $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$ en $+\infty$ (donner un dev. asymptotique avec trois termes).
2. $x \mapsto x^{1-\frac{1}{x^2}}$ sur \mathbb{R} .
3. $x \mapsto \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}$ en $+\infty$.
4. $x \mapsto x(\ln(2x + 1) - \ln(x))$ en $+\infty$.
5. $x \mapsto \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$ en $+\infty$.
6. $x \mapsto (x + 1) \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ en $+\infty$.
7. $x \mapsto x^3 \arctan\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$ en $+\infty$.