TD2
Fonctions réelles

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto \ln\left((x-1)^2+2\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer le tableau de variations de f.
3. Déterminer les ensembles suivants :
   1. $f(\mathbb{R})$ 2. $f([-1;1])$ 3. $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$ 4. $f^{\leftarrow}([2;3])$

Exercice 2 A l'aide de la parité, étudier les fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \ln(|x|)$.
2. $f_2 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
3. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
4. $f_4 : x \mapsto \frac{x^3(\sin(x)-x)}{2}$.

Exercice 3 Etudier le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes puis les dériver sur cet ensemble.

1. $f_1 : x \mapsto \cos^6(x)$.
2. $f_2 : x \mapsto \ln(\ln(x))$.
3. $f_3 : x \mapsto e^{\sin(x)}$.
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{(x^2+1)^3}$.
5. $f_5 : x \mapsto \frac{1+\sqrt{x}}{(x+1)^{3/2}}$.
6. $f_6 : x \mapsto x^2 e^{\frac{1}{x}}$.
7. $f_7 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)$.
8. $f_8 : x \mapsto e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$.

Exercice 4 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions

$$f_\lambda : \quad x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

Montrer que les tangentes en 0 aux fonctions f_λ sont parallèles mais distinctes mais que les tangentes en 1 sont concourantes.

Exercice 5 Etudier la ou les branche(s) infinie(s) des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x e^{-x}$.
2. $x \mapsto \frac{2x^2+1}{x^2+3}$.
3. $x \mapsto \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}-3}$.
4. $x \mapsto \frac{x^3+x+1}{x^2+4}$.

Pour aller plus loin

Exercice 6 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+x-2}{2x^3+7x^2+2x-3}}$.
2. $g : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.
3. $h : x \mapsto \ln(\cos(2x+\pi))$.
4. $i : x \mapsto \sqrt{\ln(x) - x^2 + \frac{1}{2}}$.

Exercice 7 Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |x-1| + 2|x+2|$.

Exercice 8 Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes et T-périodiques, avec $T \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ soit croissante sur I et $f \circ f \circ f$ soit strictement décroissante sur I. Montrer que f est strictement décroissante sur I.

Exercice 10 Etudier la ou les branche(s) infinie(s) des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{x^4+2x^3-1}{x^2+4}$.
2. $x \mapsto x^2 \ln\left(\frac{x^2+2}{x}\right)$.
3. $x \mapsto \frac{x^3+x^2-x}{x^2-1}$.
4. $x \mapsto \frac{x^2-x+1}{|x-1|-x}$.
5. $x \mapsto x + \sqrt{x}$.
6. $x \mapsto x\frac{2\ln(x)+1}{\ln(x)}$.

Rab

Exercice 11 Décomposer les fonctions suivantes en composées de fonctions élémentaires et préciser la suite des ensembles images.

1. $f : x \mapsto \cos\left(e^{\sin(x)-1}\right) + 1$.
2. $g : x \mapsto \sqrt{\frac{-1}{\ln(1-4x^2)}}$.
3. $h : x \mapsto \ln^2\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)$.

Exercice 12 Déduire des fonctions de références l'allure des graphes des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto (2x+3)^2 - 2$.
2. $g : x \mapsto 1 - \frac{2}{x-3}$.
3. $h : x \mapsto 2e^{\frac{x}{2}}$.
4. $i : x \mapsto -1 - \frac{\cos(x-1)}{2}$.
5. $j : x \mapsto 2|x+2| - 1$.

Exercice 13 Déterminer la parité des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto 2x^6 - 5x^4 + x^2 + 6$.
2. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{(x^3-2x)^3} \times \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}$.
3. $f_4 : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
4. $f_6 : x \mapsto \left|2x^2 - e^{x^4} + \ln\left(x^2-1\right)\right|$.
5. $f_8 : x \mapsto x^3 \frac{\sin(x)-x}{2+\cos^2(x)}$.

TD2 bis
Bijection

Exercice 14 Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer la fonction réciproque.

1. $f :]1;+\infty[\to]0;+\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{x-1}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - x$.
3. $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$.
4. $f : [1;+\infty[\to [0;+\infty[$, $x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Exercice 15 Soient $I =]0;+\infty[$ et $f : x \mapsto 1 + x + 2\sqrt{x}$.

1. Factoriser l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in I$.
2. Montrer que f est réalise une bijection de I dans un ensemble à J à préciser.
3. Montrer que f est dérivable sur I calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$
4. Exprimer pour tout $x \in I$, $f'(x)$ en fonction de $y = f(x)$.
5. En déduire que f^{-1} est dérivable sur J et déterminer pour tout $y \in J$ une expression de $\left(f^{-1}\right)'(y)$ en fonction de y.
6. En déduire f^{-1}.
7. Retrouver le résultat précédente par une méthode directe.

Pour aller plus loin

Exercice 16 Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer qu'elle est impaire.
2. Calculer les limites de f et préciser les éventuelles asymptotes.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Montrer que f est bijective.
5. On pose $u = e^x - 1$ et $v = e^x + 1$. Exprimer e^x puis 1 en fonction de u et v. En déduire une expression de f' en fonction de f.
6. Sans calculer f^{-1}, déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et calculer $\left(f^{-1}\right)'$.
7. En déduire une expression explicite de f^{-1}.
8. Retrouver le résultat précédent par une autre méthode.

Exercice 17 Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & [2;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2 - 4x + 5}. \end{array}$$

1. Prouver que f réalise une bijection de $[2;+\infty[$ sur son ensemble image. On note g sa fonction réciproque.
2. Sans calculer g, déterminer l'ensemble de dérivabilité de g, justifier que g admet une tangente verticale en 1 et montrer que pour tout y dans le domaine de dérivabilité, $g'(y)g(y) - 2g'(y) = y$.
3. En déduire une expression explicite de g.
4. Retrouver la question précédente par une méthode directe.

Rab

Exercice 18 Etudier les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$.
2. $x \mapsto e^{x\ln(x)}$.
3. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
4. $x \mapsto \ln\left(1 + x + x^2\right)$.
5. $x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$.
6. $x \mapsto e^{x^2\ln(x)}$.
7. $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.
8. $x \mapsto x^2 + 1 - \frac{2}{x}$.
9. $x \mapsto x^2\, e^{-x}$.
10. $x \mapsto \frac{2\ln(x)+3}{x}$.
11. $x \mapsto \frac{x^2+x}{|x|+1}$.
12. $x \mapsto x + \ln\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

Exercice 19 Soit $f : [1;+\infty[\to [0;+\infty[$, $x \mapsto x^2 - 1$. La fonction f est-elle bijective ?

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Déterminer si f est injective, surjective ou bijective.
2. Montrer que la restriction g de f à l'ensemble $]-1;1[$ définit une bijection de $]-1;1[$ dans un intervalle J à déterminer.
3. Déterminer g^{-1}.