

## TD20

### Arithmétique et dénombrement

**Exercice 1** Une tentative d'homicide par balle a eu lieu au cours d'un bal. La police a demandé à chacune des 18 personnes présentes les questions suivantes : Avez-vous entendu une détonation ? Avez-vous vu quelqu'un s'enfuir ?

Dix personnes ont répondu « oui » à la première question, six personnes ont répondu « non » à la deuxième question, cinq personnes ont répondu « non » aux deux questions.

Combien de personnes ont répondu « oui » aux deux questions ?

**Exercice 2** Un jeu de cartes contient 32 cartes. Un magicien en tire trois successivement, sans remise et les dispose dans l'ordre des tirages sur la table. Combien de présentation de ces trois cartes contiennent au moins un coeur ?

**Exercice 3** Une urne contient 6 boules blanches numérotées de 1 à 6 et 5 boules noires numérotées de 1 à 5. On tire successivement 4 boules sans remise en notant l'ordre d'apparition des boules. Combien de résultats amènent 3 boules blanches et une boule noire ?

**Exercice 4** Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur (coeur, pique, carreau, trèfle). Une main est constituée de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent au moins un as ?
3. Combien contiennent exactement un roi ?
4. Combien contiennent au moins un coeur ou une dame
5. Combien ne contiennent que des cartes de 2 couleurs au plus ?

**Exercice 5** Dix livres  $L_1$  à  $L_{10}$  sont placés côte à côte sur une étagère. Quel est le nombre de dispositions qui placent côte à côte les livres  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  dans cet ordre ?

### Pour aller plus loin

**Exercice 6** Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien amènent deux chaussures de la même couleur ?
3. Combien amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien permettent de reconstituer une vraie paire de chaussures ?

**Exercice 7** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On note  $S(n, p)$  le nombre de surjections entre un ensemble de cardinal  $n$  dans un ensemble de cardinal  $p$ .

1. Calculer  $S(n, 1)$ .
2. Montrer que si  $n \geq 2$ ,  $S(n, 2) = 2^n - 2$ .
3. On suppose  $n \geq p + 1$ . En discutant le nombre d'éléments ayant un antécédent, justifier que

$$S(n, p+1) = (p+1)^n - \sum_{k=1}^p \binom{p+1}{k} S(n, k).$$

4. Application : de combien de façons peut-on répartir un groupe de 10 personnes en trois groupes numérotés 1, 2 et 3 de sorte qu'il y ait au moins une personne dans chaque groupe ?

**Exercice 8** Trois élèves ont laissé leur blouse en TP de biologie. La semaine suivante, chacun d'eux en prend une au hasard.

1. Calculer le nombre de façons qu'ils ont de les choisir de sorte pour qu'exactement un élève retrouve sa blouse ?
2. Calculer le nombre de façons qu'ils ont de les choisir de sorte pour qu'exactement deux élèves retrouvent leur blouse ?
3. Calculer le nombre de façons qu'ils ont de les choisir de sorte pour qu'exactement les trois élèves retrouvent leur blouse ?
4. En déduire le nombre de façons qu'ils ont de les choisir pour qu'aucun élève ne retrouve sa blouse.
5. Calculer le nombre de façons qu'ils ont de les choisir pour qu'aucun élève ne retrouve sa blouse, lorsqu'ils ont été quatre à l'avoir oubliée.

De combien de façons peuvent-ils les choisir de sorte que l'un au moins d'entre eux retrouve sa blouse ?

**Exercice 9** Soient  $p, q \in \mathbb{N}$  et soient  $E$  et  $F$  deux ensembles disjoints ayant respectivement  $p$  et  $q$  éléments, et  $r$  un entier tel que  $r \leq p + q$ . (Remarque : un ensemble à 0 élément est l'ensemble vide.)

1. En dénombrant de deux façons le nombre de parties à  $r$  éléments de  $E \cup F$ , montrer que

$$\sum_{i=0}^r \binom{p}{i} \binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r} \quad (\text{Formule de Vandermonde})$$

2. En déduire une expression simple de  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$

**Exercice 10** On considère une urne contenant  $a$  boules blanches et  $b$  boules noires. On tire les boules une à une successivement, sans remise, jusqu'à vider l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirage possibles ?
2. Combien de tirages amènent la dernière boule blanche en  $k$ -ième position ?
3. En déduire  $\sum_{k=a}^{a+b} \binom{k-1}{a-1} = \binom{a+b}{a}$

## Rab

**Exercice 11**

1. Combien y a-t-il de mots :
  - (a) de 6 lettres écrits avec les lettres A, B, C, D, E, F (sans remise) ?
  - (b) de 5 lettres écrits avec deux A, trois B ?
  - (c) de 6 lettres écrits avec exactement deux A, trois B ?
  - (d) de 6 lettres écrits avec deux A, trois B, un C ?
2. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot chaise ?
3. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot anagramme ?

**Exercice 12** Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires indiscernables. On tire successivement 6 boules de l'urne en remettant systématiquement la boule tirée.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Combien de ces résultats amènent :
  - (a) 5 boules blanches et une boule noire, dans cet ordre ?
  - (b) 1 boule noire au plus ?
  - (c) 3 boules blanches et 3 boules noires ?
  - (d) une boule blanche au moins ?

3. Reprendre les questions précédentes en supposant à présent les boules blanches numérotées de 1 à 5 et les boules noires numérotées de 6 à 13.

**Exercice 13** Dans une soirée,  $n$  couples se rencontrent et se saluent. Chaque personne serre (une seule fois) la main de chacune des autres (sauf celle de son conjoint). Combien y aura-t-il de poignées de main échangées ?

**Exercice 14** On dispose 4 pions numérotés de 1 à 4 sur 3 cases numérotées de 1 à 3. Une case peut éventuellement contenir plusieurs pions. De combien de façons peut-on opérer de sorte qu'une case au moins soit vide.

**Exercice 15**

1. Trouver le nombre d'applications (respectivement de surjections) de  $\{1, 2, 3\}$  sur  $\{a, b\}$ . Expliciter les surjections.
2. Donner en extension l'ensemble des partitions de  $\{1, 2, 3\}$  en deux parties.

## Arithmétique

**Exercice 16** Quel est le chiffre des unités de  $19971997^{10}$  ?

**Exercice 17** Soit  $n > 0$ .

1. Montrer que 11 divise  $2^{6n+3} + 3^{2n+1}$ .
2. Montrer que 8 divise  $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ .  
*On pourra discuter suivant si  $n$  est pair ou non.*

**Exercice 18** Déterminer les entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que :

1.  $n|n+8$
2.  $n-1|n+11$
3.  $n-3|n^3-3$
4.  $n-1|n^2+1$

**Exercice 19** Soit  $a, b$  deux entiers tels que  $a^2|b^2$ . Montrer que  $a|b$ .

**Exercice 20** Montrer que si  $2^a - 1$  est premier alors  $a$  est premier.

**Exercice 21** Calculer le PGCD des couples de nombres suivants :

126 et 230                      390 et 720                      180 et 606

**Exercice 22** Résoudre dans  $\mathbb{N}$  :  $\begin{cases} PGCD(a, b) = 18 \\ a + b = 360 \end{cases}$  et  $\begin{cases} PGCD(a, b) = 18 \\ ab = 3240 \end{cases}$

**Exercice 23** Calculer  $a = PGCD(720, 252)$  et  $b = PPCM(720, 252)$ . Donner deux entiers  $u, v$  tels que  $720u + 252v = a$ .

**Exercice 24** Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  les équations suivantes :

$$7x - 9y = 1, \quad 7x - 9y = 6, \quad 11x + 17y = 5$$