

## TD 21

### Applications linéaires

**Exercice 1** Déterminer si les applications suivantes sont linéaires ou non.

- |  |   |
|--|---|
| 1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$<br>$(x, y) \mapsto 3x + 5y$ | 2. $f_2 : \mathcal{C}^0([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$<br>$f \mapsto f(3/4)$   |
| 3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$<br>$(x, y) \mapsto xy$      | 4. $f_4 : \mathcal{C}^0([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}^0([0, 1])$<br>$f \mapsto \left(t \mapsto \frac{f(t)}{1+t^2}\right)$ |

**Exercice 2** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  et soit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$   
 $M \mapsto AM$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

**Exercice 3** Pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $f(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer son noyau et son image.

**Exercice 4** Justifier qu'il existe une unique application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), \quad f(1, 1, 0) = (1, 0) \quad \text{et} \quad f(1, 1, 1) = (1, 1)$$

Donner l'expression de  $f(x, y, z)$  en fonction de  $x, y, z$  et déterminer l'image et le noyau de  $f$ .

**Exercice 5** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $X \mapsto AX$ . Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 6** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que

1.  $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\} \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$
2.  $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f) \iff E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$

**Exercice 7** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^2 = 2f + 3\text{Id}_E$ .

1. Démontrer que  $f$  est un automorphisme de  $E$  et déterminer  $f^{-1}$ .

2. Montrer que  $\text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$

3. Montrer que  $\text{Im}(f - 3\text{Id}_E) \subseteq \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$

4. On suppose dans cette question que  $E$  de dimension finie. Montrer que  $E = \text{Ker}(f - 3\text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ .

5. Retrouver le résultat de la question précédente lorsque  $E$  est de dimension quelconque.

### Pour aller plus loin

**Exercice 8** Soit  $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  définie par  $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$ . Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme et préciser son noyau.

**Exercice 9** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- 1)  $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$
- 2)  $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$
- 3)  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .

**Exercice 10** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  et  $f$  un endomorphisme nilpotent non nul de  $E$  i.e. il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Supposons que  $p$  est le plus petit entier tel que  $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. Soit  $u \in E$ . Montrer que la famille  $(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{p-1}(u))$  est libre si et seulement si  $u \notin \text{Ker}(f^{p-1})$ .
2. En déduire que  $p \leq n$  puis que  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
3. Si  $n = p$ , déterminer le rang de  $f$ .
4. On considère la dérivation sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Proposer un  $u \in E$  vérifiant les conditions de la question 1.

**Exercice 11** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $2n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f \circ f = 0$ . On suppose que il existe  $u_1, \dots, u_n \in E$  tels que  $(f(u_1), \dots, f(u_n))$  est une famille libre.

1. Démontrer que  $\text{rg}(f) \geq n$ .
2. Prouver que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre.
3. Montrer que  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ .
4. Démontrer que  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Exercice 12** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $V \subseteq f(V) \implies f(V) = V$ .

**Exercice 13** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad [f^2 = 0 \text{ et } n = 2\text{rg}(f)]$$

**Exercice 14** Soit  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X) - P(X+1) \end{matrix}$ .

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Soit  $P$  un polynôme non nul de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Déterminer le degré de  $f(P)$  en fonction du degré de  $P$ .
- Déterminer le noyau de  $f$ .
- Montrer que  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

**Exercice 15** Soit  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On considère  $\phi, \psi \in \mathcal{F}(E)$  définie par : pour tout  $f \in E$

$$\phi(f) = f' \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

- Montrer que  $\phi$  et  $\psi$  sont des endomorphismes de  $E$ .
- calculer  $\phi \circ \psi$  et  $\psi \circ \phi$ .
- Déterminer images et le noyau de  $\phi$  et  $\psi$ .

**Exercice 16** Soit  $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ , on définit la fonction  $\Phi(f)$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \Phi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad \Phi(f)(0) = f(0).$$

- Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ .
- $\Phi$  est-il injectif? Surjectif?

## Rab

**Exercice 17** Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

- $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x^2$ .
- $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 4x - 3$
- $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; x \mapsto (2x, x/\pi, x\sqrt{2})$
- $f_4 : \mathcal{C}^0([0, 1]) \mapsto \mathcal{C}^1([0, 1]); f \mapsto (x \mapsto e^{-x} \int_0^1 f(t)dt)$
- $f_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + z/3)$

6.  $f_6 : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) : f \mapsto (x \mapsto f'(x) + f(x) \cdot \sin x)$

**Exercice 18** Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leurs noyaux et images :

- Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ .
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = z + i\bar{z}$ . ( $\mathbb{C}$  vu comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).

**Exercice 19** Soit  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z, t) = (2x + y + z, x + y + t, x + z - t)$ . Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

**Exercice 20** Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  définie par  $f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$ . Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 21** Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que

$$v(\text{Im}(u)) \subseteq \text{Im}(u), \quad \text{et} \quad v(\text{Ker}(u)) \subseteq \text{Ker}(u)$$

On dit que  $\text{Im}(u)$  et  $\text{Ker}(u)$  sont stables par  $v$ .

**Exercice 22** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application injective avec  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que pour toute famille  $(u_1, \dots, u_n)$  de vecteurs de  $E$ , on a

$$\text{rg}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \text{rg}(u_1, \dots, u_n)$$

## Projecteurs et symétries

**Exercice 23** Soit  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{2}(-y + z, -2x + y + z, -2x - y + 3z) \end{matrix}$ . Montrer que  $f$  est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

**Exercice 24** Soit  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \frac{1}{3}(x - 2y - 6z, -x + 2y - 3z, -x - y) \end{matrix}$ . Montrer que  $f$  est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

**Exercice 25** Soient  $E = \mathbb{R}^3$ ,

$$F = \text{Vect}((1, 1, 1)) \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}.$$

Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe et déterminer la projection et la symétrie sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

**Exercice 26** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, E)$  telles que  $u \circ v = \text{Id}_F$ . Montrer que  $v \circ u$  est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.