

TD 24

Représentation matricielle des applications linéaires

Exercice 1 Pour les applications suivantes : déterminer la matrice relative aux bases canoniques, calculer leur rang, dire si elles sont injectives, surjectives, déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$. Si elles sont bijectives, déterminer leur réciproque.

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (y + z, z + x, x + y) \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto P(X + 1) \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{cases}$

Exercice 2 Soient E et F deux espaces vectoriels. On note $\mathcal{C}_E = (e_1, e_2)$ une base de E et $\mathcal{C}_F = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de F . On définit dans E les familles de vecteurs suivante :

$$\mathcal{E}_1 = (e'_1, e'_2) = (-e_1 + e_2, 2e_1 + e_2) \quad \mathcal{E}_2 = (e''_1, e''_2) = (3e_1 - 2e_2, e_1 + e_2).$$

On définit dans F les familles de vecteurs suivante :

$$\mathcal{F}_1 = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3) = (\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ \mathcal{F}_2 = (\varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \varepsilon''_3) = (-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

1. Montrer que les familles $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ sont des bases de \mathbb{R}^2 et que les familles $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ sont des bases de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer $P_{\mathcal{C}_E, \mathcal{E}_1}$ et $P_{\mathcal{E}_1, \mathcal{C}_E}$
3. De même, déterminer $P_{\mathcal{C}_E, \mathcal{E}_2}$ et $P_{\mathcal{E}_2, \mathcal{C}_E}$.
4. A l'aide des matrices précédentes, calculer $P_{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}$ et $P_{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1}$.
5. Effectuer le même travail avec $\mathcal{C}_F, \mathcal{F}_1$ et \mathcal{F}_2 .

6. Soit $f \in \mathcal{L}(F)$ telle que $\text{mat}_{\mathcal{C}_F}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{F}_1}(f)$.

7. Soient $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $\text{mat}_{\mathcal{C}_F, \mathcal{C}_E}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $h \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{mat}_{\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_E}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices $\text{mat}_{\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_2}(g)$ et $\text{mat}_{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1}(h)$. En déduire $\text{mat}_{\mathcal{F}_1, \mathcal{E}_1}(h \circ g)$.
8. Soit $u = 2e''_1 + 2e''_2$. Donner les coordonnées de $h(u)$ dans la base \mathcal{F}_2 .

Exercice 3 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.
2. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\text{Ker}(f + \text{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice de f dans une base adaptée à la supplémentarité établie à la question précédente.

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On note f l'endomorphisme de E associée à la matrice A relativement à la base \mathcal{B} . Soient enfin les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $u_2 = e_1 - e_2$ et $u_3 = e_1 + e_3$ et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.

1. Montrer que \mathcal{B}' est une base de E .
2. Ecrire la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .
3. En déduire sans calcul, une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'application linéaire dont la matrice

dans la base canonique \mathcal{C} est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On veut montrer qu'il existe

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que la matrice de f dans \mathcal{B} soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. *Analyse.* On suppose un tel résultat.
 - (a) À quel ensemble appartient e_1 ? En déduire une valeur de e_1 .
 - (b) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $e_2 \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$. En déduire une valeur de e_2 .
 - (c) Déterminer une valeur de e_3 .
2. *Synthèse.* Montrer que les vecteurs (e_1, e_2, e_3) précédemment obtenus forme une base \mathcal{B} de E puis justifier que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = B$.
3. Déterminer les puissances de la matrice B , puis celles de A .

Pour aller plus loin

Exercice 6 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rab

Exercice 7 Pour les applications suivantes : déterminer la matrice relative aux bases canoniques, calculer leur rang, dire si elles sont injectives, surjectives, déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$. Si elles sont bijectives, déterminer leur réciproque.

- $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + y, y - 2x + z) \end{cases}$
- $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, 2x - 3y) \end{cases}$
- $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (4x + y, x - y, 2x + 3y) \end{cases}$
- $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (3y + 2z, -x, 4y + 3z) \end{cases}$
- $f_5 : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3, f_8(e_1) = e_1 + e_2, f_8(e_2) = e_1 + e_2 + e_3, f_8(e_3) = e_1 + e_3$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{K}^3 .

Exercice 8 Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $f \circ f = f$ et que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires. Quelle est la forme de la matrice de f écrite dans une base adaptée à la supplémentarité de ces deux espaces ?

Exercice 9 On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 + X + 1)P' - (2X - 1)P$.

- Montrer que φ est un endomorphisme et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- L'application φ est-elle bijective ? Déterminer un antécédent par φ de $X^2 - 1$.
- Résoudre l'équation différentielle $(x^2 + x + 1)y' - (2x - 1)y = x^2 - 1$.

Exercice 10 Calculer le rang des familles de vecteurs suivantes de \mathbb{R}^3 :

- (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$
- (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (2, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$
- (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (1, 0, 3)$ et $u_3 = (1, 1, 2)$

Exercice 11 Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

- $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-x + y + z, x - y + z, x + y - z)$
- $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$
- $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z + t, -x + 2y + z)$

Exercice 12 Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On considère l'application linéaire f définie par

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

- Donner une base et la dimension de $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.
- Donner une base et la dimension de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$.
- Montrer que la réunion des bases précédentes constitue une base de E . Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? Même question pour la matrice de f^2 .

Exercice 13 Soit f un endomorphisme de \mathbb{C}^2 de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

- Montrer que les vecteurs $\varepsilon_1 = (i, 2)$, $\varepsilon_2 = (-2i, 1)$ forment une base de \mathbb{C}^2 .
- Montrer que la matrice de f dans cette nouvelle base est diagonale. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On pose $u = e_1 + e_3$, $v = e_1 + e_2$ et $w = e_1 + e_2 + e_3$.

- Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.
- Calculer A^n .

Exercice 15 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une base \mathcal{B} . On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^2 . Que peut-on en conclure pour f ?
- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
- Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la supplémentarité de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.