

TD8

Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x^2} \quad 2. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad 3. \int_0^{\pi/4} \tan(x) dx$$

Exercice 2 Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$1. x \mapsto \cos^2(x) \quad 2. x \mapsto \sin^2(x) \cos(x) \\ 3. x \mapsto \cos(x) e^x \quad 4. x \mapsto x \sin(x) e^x$$

Exercice 3 Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^1 \arctan(e^x) dx$. Indication : poser $t = -x$.

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 \arctan(x) dx \quad 2. \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx \quad 3. \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx \\ 4. \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln(x)} dx \quad 5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx \quad 6. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ 7. \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \quad 8. \int_0^1 x e^{x^2} dx \quad 9. \int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx \\ 10. \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x)) dx \quad 11. \int_0^1 \ln(1+x^2) dx \quad 12. \int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3} dx$$

Exercice 5 Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

$$1. x \mapsto \frac{x^3+1}{2x^2-6x+4} \quad 2. x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)} \text{ (poser } u = \tan(x) \text{)} \\ 3. x \mapsto \frac{2}{x^2-5x+4} \quad 4. x \mapsto x \arctan(x) \quad 5. x \mapsto \frac{3}{x^2+x+2} \\ 6. x \mapsto x \ln(x) \quad 7. x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2-6x+9} \quad 8. x \mapsto (x+1) \operatorname{ch}(x) \\ 9. x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^3}}} \quad 10. x \mapsto \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2-2x+1} \quad 11. x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+e^x} \\ 12. x \mapsto \frac{x^3+2x^2+1}{2x^2-2x+2}$$

Rab

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_1^2 \ln(x) dx \quad 2. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad 3. \int_0^{1/2} \arcsin(x) dx \quad 4. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\ 5. \int_{1/2}^1 \sqrt{e^x-1} dx \text{ (poser } u = \sqrt{e^x-1} \text{)} \quad 6. x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)} \text{ (} u = \sin(x) \text{)}$$

Exercice 7 Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

$$1. x \mapsto \cos(x) \sin(x) \quad 2. x \mapsto \tan(x) \quad 3. x \mapsto \frac{x^5}{1+x^{12}} \\ 4. x \mapsto \tan^3(x) \quad 5. x \mapsto \tan^4(x) \quad 6. x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} \\ 7. x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} \quad 8. x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x-1}}} \quad 9. x \mapsto \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 \\ 10. x \mapsto 2x \sin^2(x) e^x \quad 11. x \mapsto \sin(\ln(x))$$

Exercice 8 Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

$$1. x \mapsto \ln(x) \quad 2. x \mapsto x e^x \quad 3. x \mapsto (x^2 - x + 1) e^x \\ 4. x \mapsto x \cos(x) \quad 5. x \mapsto x \sin^3(x) \quad 6. x \mapsto \arctan(x) \\ 7. x \mapsto \cos(x) e^x \quad 8. x \mapsto \sin(2x) e^{-x} \quad 9. x \mapsto \cos(x) \operatorname{ch}(x)$$

Exercice 9 A l'aide d'un changement de variables, calculer les primitives des fonctions suivantes.

$$1. x \mapsto \frac{\ln(x)}{x+x \ln^2(x)} \quad 2. x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{ch}^2(x)} \\ 3. x \mapsto \frac{1}{\cos(x)} \text{ (} u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{)} \quad 4. x \mapsto \frac{1}{2+\cos(x)} \text{ (} u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{)} \\ 5. x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \text{ (} x = \operatorname{sh}(u) \text{)} \quad 6. x \mapsto \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} \text{ (} x = 2 + \sin(u) \text{)}$$

Exercice 10 Déterminer les primitives des fonctions suivantes.

$$1. x \mapsto \frac{1}{2x^2-6x+4} \quad 2. x \mapsto \frac{x+1}{2x^2-6x+4} \quad 3. x \mapsto \frac{1}{x^2-2x+1} \\ 4. x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-2x+1} \quad 5. x \mapsto \frac{1}{2x^2-2x+2} \quad 6. x \mapsto \frac{x+2}{2x^2-2x+2} \\ 7. x \mapsto \frac{1}{2x^2-8x+8} \quad 8. x \mapsto \frac{2}{x^2-x-6} \quad 9. x \mapsto \frac{1}{2x^2+2x+1} \\ 10. x \mapsto \frac{x}{x^2-6x+9} \quad 11. x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2x-3} \quad 12. x \mapsto \frac{x+1}{x^2+3x+1} \\ 13. x \mapsto \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \quad 14. x \mapsto \frac{x^3}{2x^2+2x+1}$$