

Colle du 07/10 - Sujet 1
Equations différentielles et déterminant

Question de cours

1. Enoncer le théorème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
2. Démontrer que deux matrices semblables ont le même déterminant.

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = x^2 + 4 + e^{2x}$.

Exercice 2. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & \ddots & (0) & \vdots \\ a^2 & ab & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & b & -1 \\ a^n & a^{n-1}b & \cdots & ab & b \end{vmatrix}.$$

Colle du 07/10 - Sujet 2
Equations différentielles et déterminant

Question de cours

1. Définir l'application déterminant.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de $ay' + by = 0$.

Exercice 1. Soit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (1+t^2)^2 y'' + 2t(1+t^2) y' + y = \sqrt{1+t^2}. \quad (E)$$

A l'aide du changement de variable $t = \tan(x)$ résoudre (E).

Exercice 2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice définie pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{ij} = 1 + x^2$ si $i = j$, $a_{ij} = x$ si $|i - j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon. Calculer $\det(A)$.

Colle du 07/10 - Sujet 3
Equations différentielles et déterminant**Question de cours**

1. Donner le développement du déterminant sur une colonne.
2. Présenter la méthode d'abaissement du degré.

Exercice 1. Soit $(E) : \forall x \in \mathbb{R}, y'' - e^x y = 0$.

1. Soit y une solution de (E) telle que $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que y est nulle. *On pourra poser $z = y^2$.*
2. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E) telles que $y_1(0) = y_2(1) = 0$ et $y_1'(0) = y_2'(1) = 1$. Montrer que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions.
3. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $(F) : y'' - e^x y = f$. Montrer qu'il existe une unique solution de (F) vérifiant $y(0) = y(1) = 0$.

Exercice 2. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice définie pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_{ij} = \binom{i}{j-1}$ avec la convention $\binom{i}{j-1} = 0$ si $j-1 > i$. Calculer $\det(A)$.