Programme de colles 01
Logique, raisonnement et fonctions réelles

Quinzaine du 15 au 26 septembre

Logique et raisonnement

1. Valeur de vérité d'une assertion, négation, connecteurs logiques ET et OU.
2. Lois de Morgan, propriétés des connecteurs logiques (commutativité, associativité, distributivité).
3. Implication, contraposée, réciproque, équivalence.
4. Prédicats, quantificateurs universel et existentiel. Les étudiants doivent être capables de traduire un énoncé en français en une assertion mathématique et réciproquement. Non commutativité et négation des quantificateurs.
5. Méthodes de raisonnements : par raisonnement direct, contraposée, disjonctions de cas, double implication, raisonnement par analyse-synthèse.
6. Démonstration par récurrence, simple, double ou forte.

Fonctions réelles

1. Définition d'une fonction, ensemble de définition, ensemble image, image réciproque.
2. Opérations élémentaires sur les fonctions, composée.
3. Graphe d'une fonction, transformation du graphe (juste énoncé en classe) : translation horizontale $x \mapsto f(x+a)$, translation verticale $x \mapsto f(x)+a$, dilatation horizontale $x \mapsto f(ax)$, dilatation verticale $x \mapsto af(x)$.
4. Fonction paire, impaire, périodique, conséquences sur les graphes.
5. Monotonie, majoration, minoration, fonctions bornées.
6. Continuité : somme, produit, composition de fonctions continues, théorème des valeurs intermédiaires.
7. Dérivation : taux d'accroissement, équation de la tangente, dérivation d'une somme, d'un produit d'une composée.
8. Dérivées n-ièmes.

Questions de cours

1. Enoncer les lois de Morgan.
2. Définir logiquement une implication.
3. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation d'une implication.
4. Définir l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
5. Comment obtient-on le graphe de $g_1 : x \mapsto f(x)+a$? de $g_2 : x \mapsto f(x+a)$? de $g_3 : x \mapsto af(x)$? de $g_4 : x \mapsto f(ax)$?
6. Définir une fonction paire ou impaire. Que dire de son graphe ?
7. Définir une fonction croissante et une fonction strictement décroissante.
8. Définir une fonction majorée, minorée, bornée. Caractériser par la valeur absolue le fait qu'une fonction soit bornée.
9. Définir une fonction continue en a.
10. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
11. Définir une fonction dérivable en a. Quel est le lien entre continuité et dérivabilité ?

Démonstration de cours

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + (-1)^n$.
3. Résoudre l'équation $(E) : x = \sqrt{3-2x}$.

Les réponses du cours

1. Soient P et Q deux assertions. On a
$$\overline{P \text{ ET } Q} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P} \text{ OU } \overline{Q}$$
et
$$\overline{P \text{ OU } Q} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P} \text{ ET } \overline{Q}$$
2. Soient P et Q deux assertions. L'implication $P \Rightarrow Q$ est donnée par
$$\overline{P}\ OU\ Q.$$
3. Soient P et Q deux assertions et I l'implication $P \Rightarrow Q$. Sa réciproque est donnée par
$$Q \Rightarrow P,$$
sa contraposée est donnée par
$$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P},$$
sa négation est donnée par
$$P \text{ ET } \overline{Q}.$$
4. Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U,\mathbb{R})$, $A \subseteq U$ et $B \subseteq \mathbb{R}$.
   - L'image directe de A par f est
   $$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \}.$$
   - L'image réciproque de B par f est
   $$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in U \mid f(x) \in B \}.$$
5. A partir du graphe de f, on obtient le graphe de
   - g_1 par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
   - g_2 par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.
   - g_3 par une dilatation/contraction verticale de coefficient a.
   - g_4 par une dilatation/contraction horizontale de coefficient $\frac{1}{a}$.
6. Soient $U \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(U,\mathbb{R})$.
   La fonction f est paire si
   - U est centré en 0 : $\forall x \in U,\ -x \in U$,
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.

   Le graphe de f est alors symétrique par rapport à (Oy).
   La fonction f est impaire si
   - U est centré en 0 : $\forall x \in U,\ -x \in U$,
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.

   Le graphe de f est alors symétrique par rapport à $(0,0)$.
7. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que f est croissante sur I si
$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad [(x \leqslant y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) \leqslant f(y))].$$
f est strictement décroissante sur I si
$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad [(x < y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) > f(y))].$$
8. Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{F}(U,\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :
$$\begin{aligned}
f \text{ est majorée sur } U \quad &\Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in U, \quad f(x) \leqslant M \\
f \text{ est minorée sur } U \quad &\Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in U, \quad m \leqslant f(x) \\
f \text{ est bornée sur } U \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (m,M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in U, \quad m \leqslant f(x) \leqslant M \\
&\Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in U, \quad |f(x)| \leqslant M.
\end{aligned}$$

9. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On a

$$f \text{ continue en } a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe et vaut } f(a).$$

10. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{F}([a; b], \mathbb{R})$. Si f est continue sur $[a; b]$ alors,

$$\forall \lambda \in [f(a); f(b)], (\text{ ou } [f(b); f(a)]), \exists c \in [a; b], \qquad f(c) = \lambda.$$

11. Soient $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a, $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On a

$$f \text{ est dérivable en } a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

En particulier

$$(\, f \text{ dérivable en } a \,) \quad \Rightarrow \quad (\, f \text{ continue en } a \,).$$

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. Procédons par l'absurde. Soient $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ deux entiers premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Alors,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2q^2.$$

Donc p^2 est pair.

Lemme

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

On démontre le lemme par contraposée i.e. démontrons que n impair $\Rightarrow$ n^2 impair. Si n est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Ainsi,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{=k' \in \mathbb{N}} + 1.$$

Donc n^2 est impair ce qui démontre le lemme.
Par le lemme, on en déduit que p est pair. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$. Donc

$$2q^2 = p^2 = 4k^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 2k^2.$$

Donc q^2 est pair. En utilisant le lemme avec $n = q$, on obtient que q est pair.
Ainsi, p et q sont pairs ET premiers entre eux, ce qui est absurde. Conclusion,

$$\boxed{\sqrt{2} \text{ est irrationnel.}}$$

□

Proposition (démo 2)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + (-1)^n$.

Démonstration. Procédons par une récurrence double. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \qquad « \, u_n = 3^n + (-1)^n. \, »$$

Initialisation. Si $n = 0$, alors $3^n + (-1)^n = 3^0 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2 = u_0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Si $n=1$, $3^n+(-1)^n = 3^1+(-1)^1 = 3-1 = 2 = u_1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(\mathscr{P}(n) \text{ ET } \mathscr{P}(n+1)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies :

$$u_n = 3^n + (-1)^n\,, \quad u_{n+1} = 3^{n+1} + (-1)^{n+1}\,.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 3u_n && \text{par définition} \\
&= 2\left(3^{n+1} + (-1)^{n+1}\right) + 3\left(3^n + (-1)^n\right) \\
&= 2\times 3^{n+1} + 2\times(-1)^{n+1} + 3^{n+1} + 3\times(-1)^n \\
&= (2+1)\times 3^{n+1} + (-2+3)\times(-1)^n \\
&= 3\times 3^{n+1} + (-1)^n \\
&= 3^{n+2} + (-1)^{n+2} && \text{car } (-1)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n + (-1)^n\,.}$$

□

Résolvons l'équation (E) : $x = \sqrt{3-2x}$ (démo3)

Démonstration. Procédons par analyse-synthèse. *Analyse.* Soit $x \in \mathbb{R}$ et supposons que $x = \sqrt{3-2x}$. Alors,

$$x^2 = 3 - 2x$$

Donc $x^2 + 2x - 3 = 0$. Soit Δ le discriminant associé, on a

$$\Delta = 4 - 4(-3) = 4(1+3) = 4^2.$$

Les racines associées sont donc

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$$

Donc

$$x = 1 \ \text{ OU } \ x = -3.$$

Synthèse. Supposons $x = 1$. Alors,

$$\sqrt{3-2x} = \sqrt{3-2} = 1 = x.$$

Donc $x = 1$ est une solution de (E).
Supposons $x = -3$. Alors,

$$\sqrt{3-2x} = \sqrt{3-2(-3)} = \sqrt{3+6} = 3 \neq -3 = x.$$

Donc $x = -3$ n'est pas solution de (E).
Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1\}\,.}$$

□