

Programme de colles 10

Séries et dimension

Quinzaine du 23 mars au 3 avril

Séries numériques

1. Définitions : série, terme général d'une série, somme partielle, convergence, divergence, somme totale.
2. Deux séries qui coïncident à partir d'un certain rang ont même nature.
3. En cas de convergence, définition du reste d'ordre n . $R_n = S - S_n$ et $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
4. En cas de convergence, le terme général tend vers 0. Divergence grossière. Réciproque fausse.
5. L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel. Linéarité de la somme.
6. Séries géométriques, séries télescopiques, série exponentielle.
7. Théorème de comparaison série-intégrale. Séries de Riemann.
8. Séries à termes positifs : théorème de comparaison.
9. Deux séries à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents ont même nature.
10. Convergence absolue : définition, CVA $\Rightarrow$ CV, inégalité triangulaire de la somme.
11. Série dominée ou négligeable devant une série absolument convergente.

Dimension finie

Tout le chapitre sur les espaces vectoriels.

1. Définition d'un espace de dimension finie.
2. Théorème de la base extraite, de la base incomplète. Existence d'une base en dimension finie.
3. Toutes les bases d'un même espace ont le même cardinal. Définition de la dimension.
4. Lien entre le cardinal et le caractère libre, générateur.
5. Sous-espace vectoriel de dimension finie.
6. Rang d'une famille finie de vecteurs. Lien avec le caractère libre, générateur.
7. Dimension de la somme, formule de Grassmann.
8. Caractérisation d'espaces supplémentaires avec la dimension. Existence d'un supplémentaire.

Questions de cours

1. Définir la divergence grossière. Si la série converge, que dire de son terme général? Donner un contre-exemple à la réciproque.
2. Énoncer le théorème sur les séries de Riemann.
3. Énoncer le théorème de comparaison.
4. Énoncer le théorème sur la nature de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.
5. Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée? Contre-exemple de la réciproque?
6. Énoncer le théorème de la base extraite.
7. Énoncer le théorème de la base incomplète.
8. Caractériser par la dimension le fait qu'une famille soit une base.
9. Caractériser par la dimension le fait que deux sous-espaces vectoriels soient égaux.
10. Caractériser par le rang le fait qu'une famille soit génératrice/libre/base.
11. Énoncer la formule de Grassmann et caractériser par la dimension la supplémentarité.

Démonstrations de cours

1. Démontrer que la série exponentielle converge.
2. Démontrer que la série de Riemann d'exposant $\alpha = 2$ converge.
3. Déterminer un supplémentaire dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $F = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M = O_2 \right\}$.

Les réponses du cours

1. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série numérique.
 - On dit que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement si et seulement si la suite des termes généraux $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
 - Par contraposée, si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge, alors la suite des termes généraux $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
 - La suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 tandis que la série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Une série de Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si son exposant vérifie $\alpha > 1$.

3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites numériques. On suppose que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Dans ce cas, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.

Par contraposée, si $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge.

4. Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques. Si

$$1 \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

$$2 \quad (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est de signe constant à partir d'un certain rang (ou } (u_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

5. Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série numérique.
 - On dit que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge absolument si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ converge.
 - La convergence absolue implique la convergence.
 - La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument car $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est la série harmonique qui diverge.

6. Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie. De toute famille $\mathcal{G}$ finie de vecteurs de E , génératrice dans E , il existe une sous-famille $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$ qui soit une base de E .

7. Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie, $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre de E . En ajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$ à $\mathcal{L}$, il est possible de construire $\mathcal{B}$ une sur-famille de $\mathcal{L}$ qui soit une base de E .

8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E . Si (au moins) deux des assertions suivantes sont vraies

1. $\mathcal{F}$ est génératrice dans E .
2. $\mathcal{F}$ est libre.
3. $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$.

Alors $\mathcal{F}$ est une base de E .

9. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Si (au moins) deux des assertions suivantes sont vraies

1. $F \subseteq G$
2. $G \subseteq F$

$$3. \dim(F) = \dim(G).$$

Alors $F = G$.

10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E . Alors

- $\mathcal{F}$ est génératrice dans E si et seulement si $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$.
- $\mathcal{F}$ est libre dans E si et seulement si $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$.
- $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\text{rg}(\mathcal{F}) = n = p$.

11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

De plus, F et G sont supplémentaires dans E si (au moins) deux des assertions suivantes sont vérifiées :

1. $F \cap G = \{0_E\}$.
2. $F + G = E$.
3. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Démonstrations de cours

Proposition (démonstration 1)

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge.

Démonstration. Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument par la règle du n^2 . Posons $r = |z|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{r^n}{n!}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n^2 u_n = n^2 \frac{r^n}{n!} = \frac{n}{n-1} r^2 \frac{r^{n-2}}{(n-2)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times r^2 \times 0 = 0, \quad \text{par croissance comparée.}$$

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq n^2 u_n \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

$\uparrow$
car $r \geq 0$

Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 0$. Donc, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{r^n}{n!} \text{ converge.}$$

Autrement $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

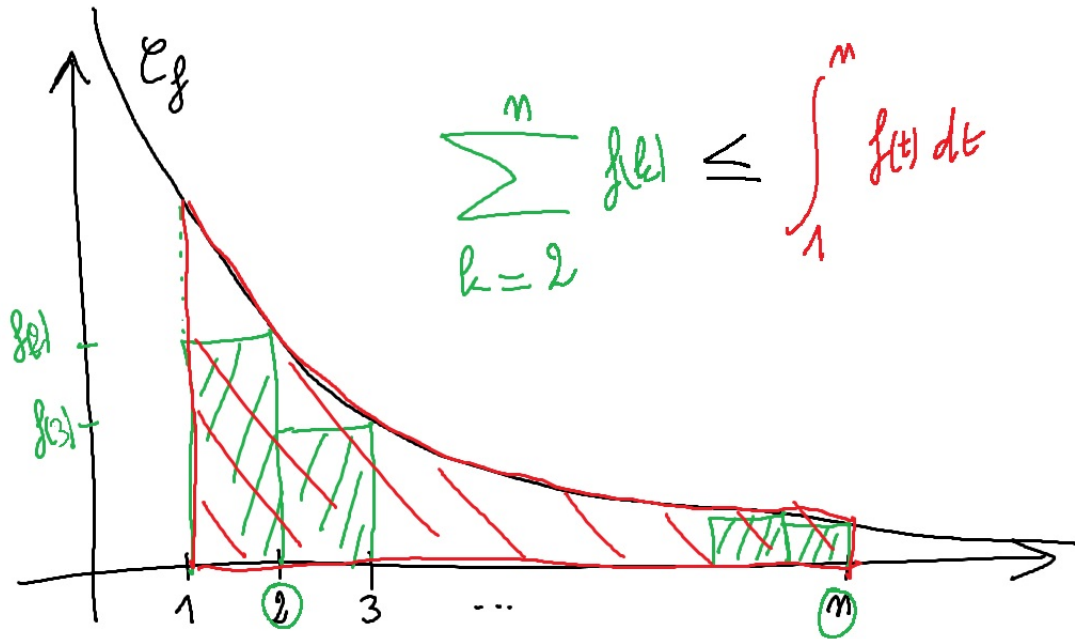
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!} \text{ converge.}$$

□

Proposition (démonstration 2)

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

Démonstration. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$. Donc par le théorème de comparaison série-intégrale (faire un dessin !)



Pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^2} dt.$$

Or

$$\int_1^n \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{t=1}^{t=n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

D'où, pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2 \rightarrow \text{indépendant de } n.$$

Ce qui est encore vraie pour $n = 1$. Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est majorée. De plus la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Donc boum ! par le théorème de convergence monotone, on en conclut que

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$$

□

Proposition (démonstration 3)

Déterminons un supplémentaire dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de $F = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M = O_2 \right\}$.

Démonstration. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in F &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M = O_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = O_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = O_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c=-a \\ d=-b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$F = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=\mathcal{B}_F} \right)$$

La famille $\mathcal{B}_F$ engendre donc F et est de plus libre car ses deux matrices sont non-colinéaires. Donc $\mathcal{B}_F$ est une base de F .

Ensuite, on observe que l'on a un « pivot » ligne 1 colonne 1 et un autre ligne 1 colonne 2. Posons

$$\mathcal{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(\mathcal{B}_G).$$

La famille $\mathcal{B}_G$ engendre G et est aussi libre car ses matrices sont aussi non-colinéaires. Donc $\mathcal{B}_G$ est une base de G . Posons enfin $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$. On observe que

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathcal{B}) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \quad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_4 \end{array} \\ &= 4. \end{aligned}$$

car on reconnaît la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (qui en tant que famille génératrice a un rang égal à la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou alors en tant que famille libre un rang égal à son cardinal). Donc $\text{rg}(\mathcal{B}) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et la famille $\mathcal{B}$ est génératrice et $\text{rg}(\mathcal{B}) = \text{Card}(\mathcal{B})$ donc la famille est libre. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En résumé,

- $\mathcal{B}_F$ est une base de F ,
- $\mathcal{B}_G$ est une base de G ,
- $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Par le théorème de la base adaptée, on en déduit que

$$\boxed{G \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

□