Programme de colles 12
Applications linéaires

Quinzaine du 06 avril au 24 avril

Applications linéaires

1. Définition par l'image d'une combinaison linéaire de deux vecteurs. Extension aux combinaisons de n vecteurs, cas particulier de la somme et de la multiplication externe.
2. Définition de l'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$, vocabulaire : endomorphisme, forme linéaire, automorphisme, isomorphisme.
3. Image de 0, restriction à un sous-espace vectoriel, somme et composition d'applications linéaires, notation f^n.
4. $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. La composition d'applications linéaires est une application linaire. L'inverse d'une application linéaire est une application linéaire. Cas d'endomorphismes commutant (formule de Leibniz et de Bernoulli).
5. Noyau et Image. Définition. Ce sont des sous-espaces vectoriels. Généralisation l'image directe et l'image réciproque de sous-espaces vectoriels sont des sous-espaces vectoriels.
6. Projecteur et symétrie. Définition et caractérisation par $p^2 = p$ et $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Détermination des espaces caractéristiques.
7. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image.
8. Image d'un sous-espace engendré et écriture de $\mathrm{Im}(f)$ à l'aide une famille génératrice de E.
9. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre et l'image d'une famille génératrice par une application surjective est génératrice.
10. Caractérisation de l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire à l'aide de l'image d'une base.
11. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
12. Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des espaces supplémentaires.
13. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Lorsque f est injective/surjective/bijective comparaison des dimensions de E et F.
14. Tous les espaces isomorphes sont de même dimension et tous les espaces de dimension n sont isomorphes à $\mathbb{R}^n$.
15. Définition du rang. Théorème du rang. Lorsque $\dim(E) = \dim(F)$, f est injective si et seulement f est surjective si et seulement si f est bijective.
16. Ensemble des solutions d'une équation $f(x) = b$ où $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$.

Questions de cours

1. Définir une application linéaire.
2. Définir le noyau et l'image d'une application linéaire.
3. Définir et caractériser une projection.
4. Définir et caractériser une symétrie.
5. Caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.
6. Définir les termes suivants : isomorphismes, endomorphismes, automorphismes.
7. Que dire de l'ensemble $\mathrm{GL}(E)$?
8. Que dire de l'image d'une famille par une application linéaire ? (Prop II.5)
9. Caractériser une application linéaire suivant l'image d'une base. (Prop II.6)
10. Comparer les dimensions des espaces de départ et d'arrivée suivant la nature de l'application linéaire.
11. Définir le rang.
12. Enoncer le théorème du rang.
13. Caractériser les isomorphismes en dimension finie.

Démonstrations de cours

1. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & f(P) = (2X+2)\,P - \left(X^2-1\right)P' \end{array}$ est linéaire et déterminer la dimension de son noyau et de son image.
2. Démontrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ u=(a,b,c) & \to & f(u) = (a+b)\,X^2 + (b+c)\,X + (a+b+c) \end{array}$ est un isomorphisme.
3. Soient (e_1, e_2) une base de E, un espace vectoriel de dimension 2. Montrer que

$$p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u = xe_1 + ye_2 & \mapsto & f(u) = \frac{x+2y}{5}e_1 + \frac{2x+4y}{5}e_2 \end{array}$$

est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques.

Les réponses du cours

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{F}(E, F)$ une fonction de E dans F. On dit que f est linéaire si et seulement si
$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in E^2, \qquad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$
2. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors
   - le noyau de f est défini par
   $$\operatorname{Ker}(f) = \{ x \in E \mid f(x) = 0_F \}.$$
   - l'image de f est définie par
   $$\operatorname{Im}(f) = \{ y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x) \}.$$
3. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E. La projection sur F parallèlement à G est, par définition, l'application
$$p : \begin{array}{rcl} E = F \oplus G & \to & E \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array}$$
Dans ce cas $F = \operatorname{Im}(p) = \{ x \in E \mid p(x) = x \} = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(p)$.
De plus, par caractérisation, on a
$$p \text{ projection} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} p \in \mathscr{L}(E) \\ p \circ p = p. \end{cases}$$
4. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels **supplémentaires** de E. La symétrie sur F parallèlement à G est, par définition, l'application
$$s : \begin{array}{rcl} E = F \oplus G & \to & E \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array}$$
Dans ce cas $F = \{ x \in E \mid s(x) = x \} = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E)$ et $G = \{ x \in E \mid s(x) = -x \} = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$.
De plus, par caractérisation, on a
$$s \text{ symétrie} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} s \in \mathscr{L}(E) \\ s \circ s = \operatorname{Id}_E. \end{cases}$$
5. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors
   - f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.
   - f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.
6. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.
   - On dit que f est un isomorphisme si et seulement si f est linéaire et bijective.
   - On dit que f est un endomorphisme si et seulement si f est linéaire et $E = F$.
   - On dit que f est un automorphisme si et seulement si f est linéaire, bijective et $E = F$.
7. Soit E un espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E est
   - stable par composition : pour tout $(f, g) \in \operatorname{GL}(E)^2$, on a $f \circ g \in \operatorname{GL}(E)$.
   - stable par inverse : pour tout $f \in \operatorname{GL}(E)$, on a $f^{-1} \in \operatorname{GL}(E)$.
8. Soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors
   - Si f est injective et $\mathscr{F}$ libre alors $f(\mathscr{F}) = (f(u_1), \dots, f(u_n))$ est libre.
   - Si f est surjective et $\mathscr{F}$ est génératrice dans E alors $f(\mathscr{F})$ est génératrice dans F.
   - Si f est un isomorphisme et $\mathscr{F}$ une base de E alors $f(\mathscr{F})$ est une base de F.
9. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
   - f est injective si et seulement si $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F.
   - f est surjective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une famille génératrice de F.

- f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une base de F.

10. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
    - Si f est injective alors $\dim(E) \leqslant \dim(F)$.
    - Si f est surjective alors $\dim(E) \geqslant \dim(F)$.
    - Si f est un isomorphisme alors $\dim(E) = \dim(F)$.
11. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose E de dimension finie. Alors le rang de f est défini par
$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f)).$$
12. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose E de dimension finie. Alors,
$$\operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) = \dim(E).$$
13. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Si deux des points suivants sont vrais
    - $\dim(E) = \dim(F)$
    - f est injective
    - f est surjective

    Alors f est un isomorphisme.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Montrons que $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & (2X+2)P - \left(X^2-1\right)P' \end{array}$ est linéaire et déterminons la dimension de son noyau et de son image.

Démonstration.

1. Montrons que f est bien définie. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors, $f(P) = (2X+2)P - \left(X^2-1\right)P'$ est un polynôme et
$$\deg(f(P)) \leqslant \max\left(\deg((2X+2)P), \deg\left(\left(X^2-1\right)P'\right)\right) = \max(1+\deg(P), 2+\deg(P')).$$
Comme $\deg(P) \leqslant 2$ et $\deg(P') \leqslant 1$,
$$\deg(f(P)) \leqslant \max(1+2, 2+1) = 3.$$
Donc $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$ et f est bien définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ et va bien dans $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. On a les égalités suivantes entre polynômes :
$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= f(R) \\ &= (2X+2)R - \left(X^2-1\right)R' \\ &= (2X+2)(\lambda P + \mu Q) - \left(X^2-1\right)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda(2X+2)P + \mu(2X+2)Q - \lambda\left(X^2-1\right)P' - \mu\left(X^2-1\right)Q' \\ &= \lambda\left((2X+2)P - \left(X^2-1\right)P'\right) + \mu\left((2X+2)Q - \left(X^2-1\right)Q'\right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$
Donc f est linéaire.
3. Calculons l'image de f. Puisque $\left(1, X, X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$,
$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \operatorname{Vect}\left(f(1), f(X), f\left(X^2\right)\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(2X+2, 2X^2+2X-X^2+1, 2X^3+2X^2-2X^3+2X\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(2X+2, X^2+2X+1, 2X^2+2X\right). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) &= \mathrm{rg}\left(2X+2, X^2+2X+1, 2X^2+2X\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(X+1, X^2+2X+1, -2X-2\right) \qquad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow \frac{1}{2}C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(X+1, X^2+2X+1\right) \qquad \text{car } C_3 = -2C_1.
\end{aligned}$$

La dernière famille obtenue est libre car les polynômes sont non colinéaires ou de degrés distincts. Donc

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(f) = 2.}$$

4. De plus $\dim\left(\mathbb{R}_2\,[X]\right) = 3 < +\infty$, donc par le théorème du rang,

$$\boxed{\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = \dim\left(\mathbb{R}_2\,[X]\right) - \mathrm{rg}\,(f) = 3 - 2 = 1.}$$

□

Proposition (démo 2)

Démontrons que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ u = (a,b,c) & \to & f(u) = (a+b)\,X^2 + (b+c)\,X + (a+b+c) \end{array}$ est un isomorphisme.

Démonstration.

1. On note que f est bien définie sur $\mathbb{R}^3$ et va bien dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrons que f est linéaire. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $v = (a',b',c') \in \mathbb{R}^3$. Posons $w = \lambda\, u + \mu v$. On a

$$w = \Big(\underbrace{\lambda\, a + \mu a'}_{=a''}, \underbrace{\lambda\, b + \mu b'}_{=b''}, \underbrace{\lambda\, c + \mu c'}_{=c''}\Big).$$

Donc

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda\, u + \mu v\right) &= f\left(w\right) \\
&= \left(a''+b''\right)X^2 + \left(b''+c''\right)X + \left(a''+b''+c''\right) \\
&= \left(\lambda\, a + \mu a' + \lambda\, b + \mu b'\right)X^2 + \left(\lambda\, b + \mu b' + \lambda\, c + \mu c'\right)X + \left(\lambda\, a + \mu a' + \lambda\, b + \mu b' + \lambda\, c + \mu c'\right) \\
&= \lambda\left[(a+b)\,X^2 + (b+c)\,X + (a+b+c)\right] + \mu\left[(a'+b')\,X^2 + (b'+c')\,X + (a'+b'+c')\right] \\
&= \lambda\, f\,(u) + \mu f\,(v)\,.
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

3. Calculons le noyau de f : Soit $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}\,(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(u) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
&\Leftrightarrow \quad (a+b)\,X^2 + (b+c)\,X + (a+b+c) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \qquad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad a = b = c = 0_{\mathbb{R}} \\
&\Leftrightarrow \quad u = 0_{\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

4. Ainsi, la fonction f est injective. Or $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$. Donc par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie,
$$\boxed{f \text{ est un insomorphisme entre } \mathbb{R}^3 \text{ et } \mathbb{R}_2[X].}$$

$\square$

Proposition (démo 3)

Soit (e_1, e_2) une base de E, un espace vectoriel de dimension 2. Montrons que
$$p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u = xe_1 + ye_2 & \mapsto & f(u) = \frac{x+2y}{5}e_1 + \frac{2x+4y}{5}e_2 \end{array}$$
est une projection.

Démonstration.

1. Par définition, p est bien définie sur E et va bien dans E.
2. Montrons que p est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et $u = xe_1 + ye_2$ et $v = x'e_1 + y'e_2$ deux vecteurs de E. Posons $w = \lambda u + \mu v$. On a
$$w = \underbrace{\lambda x + \mu x'}_{=x''} e_1 + \underbrace{\lambda y + \mu y'}_{=y''} e_1.$$
Dès lors,
$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) = f(w) &= \frac{x'' + 2y''}{5}e_1 + \frac{2x'' + 4y''}{5}e_2 \\ &= \frac{\lambda x + \mu x' + 2\lambda y + 2\mu y'}{5}e_1 + \frac{2\lambda x + 2\mu x' + 4\lambda y + 4\mu y'}{5}e_2 \\ &= \lambda\left(\frac{x+2y}{5}e_1 + \frac{2x+4y}{5}e_2\right) + \mu\left(\frac{x'+2y'}{5}e_1 + \frac{2x'+4y'}{5}e_2\right) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v). \end{aligned}$$
Donc f est un endomorphisme de E.
3. Montrons que $p \circ p = p$. Calculons :
$$p(e_1) = p(1 \times e_1 + 0 \times e_2) = \frac{1}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2.$$
Puis,
$$\begin{aligned} p^2(e_1) &= p\left(\underbrace{\frac{1}{5}}_{=x} e_1 + \underbrace{\frac{2}{5}}_{=y} e_2\right) \\ &= \frac{\frac{1}{5} + 2\frac{2}{5}}{5}e_1 + \frac{2\frac{1}{5} + 4\frac{2}{5}}{5}e_2 \\ &= \frac{1}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2 \\ &= p(e_1). \end{aligned}$$
De même,
$$p(e_2) = p(0 \times e_1 + 1 \times e_2) = \frac{2}{5}e_1 + \frac{4}{5}e_2.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
p^2(e_2) &= p\left(\underbrace{\frac{2}{5}}_{=x}e_1+\underbrace{\frac{4}{5}}_{=y}e_2\right)\\
&= \frac{\frac{2}{5}+2\frac{4}{5}}{5}e_1+\frac{2\frac{2}{5}+4\frac{4}{5}}{5}e_2\\
&= \frac{2}{5}e_1+\frac{4}{5}e_2\\
&= p(e_2).
\end{aligned}$$

Donc $p(e_1)=p^2(e_1)$, $p(e_2)=p^2(e_2)$ et (e_1,e_2) base de E. Or l'image d'une base caractérise entièrement une application linéaire. Donc

$$p^2=p\circ p=p.$$

Or $p\in\mathscr{L}(E)$. Conclusion,

$$\boxed{p \text{ est une projection.}}$$

Bonus ! Déterminons les éléments caractéristiques de p. Puisque (e_1,e_2) est une base de E, on a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
Im(p) &= Vect(p(e_1),p(e_2))\\
&= Vect\left(\frac{1}{5}e_1+\frac{2}{5}e_2,\frac{2}{5}e_1+\frac{4}{5}e_2\right)\\
&= Vect\left(\frac{1}{5}e_1+\frac{2}{5}e_2\right) \qquad \textit{car } C_2=2C_1\\
&= Vect(e_1+2e_2).
\end{aligned}$$

En particulier, puisque $v=e_1+2e_2$ est non nul et engendre $Im(p)$, (v) forme une base de $Im(p)$ donc $rg(p)=1$. Or $\dim(E)=2<+\infty$ donc par le théorème du rang, $\dim(Ker(p))=\dim(E)-rg(p)=2-1=1$. Le noyau est donc une droite. Or on a observé que $p(e_2)=2p(e_1)$. Donc par linéarité ,$p(e_2-2e_1)=0_E$ i.e. e_2-2e_1 est un vecteur non nul du noyau. Ainsi,

$$Ker(p)=Vect(e_2-2e_1).$$

Conclusion,

$$\boxed{p \textit{ est une projection sur } F=Vect(e_1+2e_2) \textit{ parallèlement à } G=Vect(e_2-2e_1).}$$

□