Programme de colles 13
Intégration et Probabilités

Quinzaine du 18 au 29 mai

Intégration

1. Définition d'une subdivision et d'une fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.
2. Théorème d'approximation de Weierstrass si f est continue sur $[a;b]$ alors on peut l'approcher à ε près par une fonction φ en escalier.
3. Propriétés : linéarité, positivité/croissance, séparation (intégrale nulle d'une fonction continue et positive), relation de Chasles.
4. Inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.
5. Théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale de a à x de f est l'unique primitive de f. Cas de l'intégrale de f' lorsque f est $\mathscr{C}^1$.
6. Sommes de Riemann et convergence des sommes.
7. Inégalité de Taylor-Lagrange.

Probabilités

1. Définition d'un univers, d'un évènement, d'un évènement élémentaire, d'une issue.
2. Définition d'une probabilité sur un univers fini et d'un espace probabilisé.
3. Définition d'une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Notation $(X = x)$, $(X \leqslant x)$ etc.
4. Evènements impossibles/négligeables, certains, incompatibles.
5. Probabilité du complémentaire, de l'union (quelconque), croissance de la probabilité.
6. Système complet d'évènements (incompatibles). Distribution de probabilités.
7. Existence et unicité d'une probabilité définie sur les singletons uniquement.
8. Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors $(X = x_i)$ forme un système complet d'évènements (incompatibles). Application au calcul de $\mathbb{P}(X \in A)$.
9. Loi d'une variable aléatoire.
10. Cas de la variable aléatoire $Y = \varphi(X)$. « Théorème de transfert » pour les probabilités :
    $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y = \varphi(x)}} \mathbb{P}(X = x)$.
11. Probabilité uniforme/équiprobable. Définition, calcul d'une probabilité d'un évènement à l'aide des cardinaux.
12. Lois usuelles : loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, loi de Bernoulli, loi binomiale.
13. Probabilité conditionnelle. Définition de $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A \mid B)$. L'application $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur Ω.
14. Formule des probabilités composées, des probabilités totales. Formule de Bayes
15. Indépendance : définition pour deux évènements. Indépendance et indépendance mutuelle pour une famille d'évènements.

Note aux colleurs : pas de couple de variables aléatoires, d'indépendance de variables aléatoires, d'espérance, de variance qui seront pour un prochain chapitre.

Questions de cours

1. Définir une probabilité et une variable aléatoire réelle.
2. Définir un système complet d'évènements et une distribution de probabilité.
3. Définir les trois lois usuelles.
4. Enoncer la formule des probabilités composées.
5. Enoncer la formule des probabilités totales.
6. Enoncer la formule de Bayes.

7. Définir et caractériser l'indépendance de deux événements.
8. Définir les deux types d'indépendance pour une famille d'évènements.
9. Enoncer le théorème de Weierstrass.
10. Enoncer la propriété de séparation de l'intégrale.
11. Enoncer l'inégalité triangulaire.
12. Enoncer l'inégalité de la moyenne.
13. Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
14. Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Démonstrations de cours

1. Déterminer le domaine $\mathcal{D}$ de définition de $\varphi : x \mapsto \int_x^{x^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$, montrer que φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$ et préciser sa dérivée.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. On se munit d'une pièce retournant pile avec une probabilité $1/3$ et de deux urnes, l'urne A contient 4 boules vertes et une boule rouge et l'urne B deux vertes et trois rouges. On lance la pièce, si l'on tombe sur pile, on pioche une boule dans l'urne A et sinon une boule dans l'urne B. Calculer la probabilité d'avoir obtenu pile sachant que l'on a obtenu une boule verte à la fin.

Les réponses du cours

1. Soit Ω un ensemble fini. On dit que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω si
   (i) $\mathbb{P}$ est une application définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ et à valeurs dans $[0;1]$,
   (ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
   (iii) $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$ vérifiant $A \cap B = \emptyset$, on a $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

   Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire toute fonction sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ une famille d'évènements. On dit que $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ forme une système complet d'évènements (incompatibles) si et seulement si
   - $\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1;p]\!]} A_i = \Omega$,
   - $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$.

   Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(p_i)_{i\in[\![1;p]\!]} \in \mathbb{R}^p$. On dit que $(p_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ est une distribution de probabilité si et seulement si
   - $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $p_i \in [0;1]$,
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} p_i = 1$.
3. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ si $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$. On note $X \sim \mathscr{U}([\![1;n]\!])$.
   - Soit $p \in [0;1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0;1\}$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X=1) = p$. On note $X \sim \mathscr{B}(p)$.
   - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p si $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
4. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ et $(A_i)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ une famille d'évènements.
$$\mathbb{P}(A_p \cap \cdots \cap A_1) = \mathbb{P}(A_p \mid A_{p-1} \cap \cdots \cap A_1)\,\mathbb{P}(A_{p-1} \mid A_{p-2} \cap \cdots \cap A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_1).$$
5. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(B_k)_{k\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ un système complet d'évènements. Alors pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A \mid B_k)\,\mathbb{P}(B_k).$$
6. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors,
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$
7. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$. On dit que A et B sont indépendants si et seulement si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$$
   ou encore lorsque $\mathbb{P}(B) \neq 0$, si et seulement si
$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A).$$
8. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ et $(A_i)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$.
   (a) On dit que les $(A_i)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ sont indépendants deux à deux si et seulement si
$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ i \neq j, \qquad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j).$$
   (b) On dit que les $(A_i)_{i\in[\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ sont indépendants si et seulement si
$$\forall J \subseteq [\![1;p]\!], \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i).$$

9. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$ et $f\in\mathscr{C}([a;b])$. Alors,
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\varphi\in\mathscr{E}([a;b]),\ \forall x\in[a;b],\qquad |f(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon\,.$$
10. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$ et $f\in\mathscr{C}([a;b])$. Si
    - f est positive sur $[a;b]$
    - d'intégrale nulle : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0$

    Alors $f=0$ sur $[a;b]$.
11. *(Enoncée ici pour $\mathbb{K}$ un corps quelconque $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)* Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$ et $f\in\mathscr{C}([a;b],\mathbb{K})$. Puisque $a<b$ alors on a
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
12. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $(f,g)\in\mathscr{C}([a;b])^2$. Puisque f est continue, $\sup_{z\in[a;b]}|f(z)|$ existe dans $\mathbb{R}$. De plus, puisque $a<b$,
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\sup_{z\in[a;b]}|f(z)|\int_a^b|g(t)|\,\mathrm{d}t.$$
13. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{C}(I)$, $a\in I$ et $A\in\mathbb{R}$. Alors la fonction
$$F:\quad \begin{aligned} I&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto A+\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$
existe, est continue et même $\mathscr{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f sur I vérifiant $F(a)=A$.
14. Soient $n\in\mathbb{N}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $f\in\mathscr{C}^{n+1}([a;b])$. Alors,
$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\leqslant\sup_{z\in[a;b]}\left|f^{(n+1)}(z)\right|\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Déterminons le domaine $\mathcal{D}$ de définition de $\varphi : x\mapsto\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$, montrons que φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$ et précisons sa dérivée.

Démonstration. Posons $f:t\mapsto\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$. La fonction $t\mapsto-\frac{1}{t}$ est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. La fonction exp est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composée, f est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. En particulier, f est continue sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x\in\mathbb{R}$.
Si $x>0$, alors $[x;x^2]\in\subseteq\mathbb{R}_+^*\subseteq\mathbb{R}^*$. On a alors f **continue** sur le **segment** $[x;x^2]$. Donc $\varphi(x)$ existe.
Au contraire si $x<0$, alors $0\in[x;x^2]$ donc f non continue sur $[x;x^2]$.
Conclusion,
$$\boxed{\varphi\text{ est définie sur }]0;+\infty[=\mathcal{D}.}$$
La fonction f est continue sur **l'intervalle** $\mathcal{D}$ donc par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction
$$F:x\mapsto\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$
est définie sur $\mathcal{D}$ et est une primitive de f sur $\mathcal{D}$. Donc $F'=f$. Or f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$ donc F l'est également. Enfin, on observe que
$$\forall x\in\mathcal{D},\quad \varphi(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t=F\left(x^2\right)-F(x).$$
Donc par composée,
$$\boxed{\varphi\text{ est }\mathscr{C}^\infty\text{ sur }\mathcal{D}}$$

et
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \varphi'(x) = 2xF'\left(x^2\right) - F'(x) = 2xf\left(x^2\right) - f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}, \quad \varphi'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.}$$

□

Proposition (démo 2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$. Montrons que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[0;1]$ car pour tout $t \in [0;1]$, $1+t+t^n \geqslant 1 > 0$ donc I_n existe.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0;1]$, on a
$$\begin{aligned} t^{n+1} \leqslant t^n \quad &\Rightarrow \quad 0 < 1+t+t^{n+1} \leqslant 1+t+t^n \\ &\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t+t^{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad 0 \leqslant I_n \leqslant I_{n+1} \quad \text{par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens.} \end{aligned}$$
Donc la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0;1]$, on a
$$\begin{aligned} 0 \leqslant t^n \quad &\Rightarrow \quad 0 < 1+t \leqslant 1+t+t^n \\ &\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t} \\ &\Rightarrow \quad I_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens.} \end{aligned}$$
Or
$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(|1+t|\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \ln(2).$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \ln(2)$ et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\ln(2)$.

Par le théorème de convergence monotone, on en conclut que
$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite convergente.}}$$
Cf exercice 5 TD23 pour calculer sa limite.

□

Proposition (démo3)

On se munit d'une pièce retournant pile avec une probabilité 1/3 et de deux urnes, l'urne A contient 4 boules vertes et une boule rouge et l'urne B deux vertes et trois rouges. On lance la pièce, si l'on tombe sur pile, on pioche une boule dans l'urne A et sinon une boule dans l'urne B. Calculer la probabilité d'avoir obtenu pile sachant que l'on a obtenu une boule verte à la fin.

Démonstration. Notons X la variable valant 1 si la pièce a retourné pile et 0 sinon et posons Y la variable valant 1 si l'on a obtenu une verte et 0 sinon. On cherche $\mathbb{P}(X=1 \mid Y=1)$. On observe qu'il est possible d'obtenir une boule verte et donc que $\mathbb{P}(Y=1) \neq 0$. Par la formule de Bayes, on a donc
$$\mathbb{P}(X=1 \mid Y=1) = \frac{\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1)\,\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(Y=1)}.$$
Si $(X=1)$ est réalisé on pioche dans l'urne A contenant 4 vertes et 1 rouge. Ainsi,
$$\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1) = \frac{4}{5}.$$

D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}\left(X=1\right)=\frac{1}{3}$. Enfin, on note que $\left(\left(X=0\right),\left(X=1\right)\right)$ forme un système complet d'évènements (incompatibles). Donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\left(Y=1\right)=\mathbb{P}\left(Y=1\mid X=1\right)\mathbb{P}\left(X=1\right)+\mathbb{P}\left(Y=1\mid X=0\right)\mathbb{P}\left(X=0\right)$$

On a vu que $\mathbb{P}\left(Y=1\mid X=1\right)\mathbb{P}\left(X=1\right)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{15}$. De même, $\mathbb{P}\left(Y=1\mid X=0\right)\mathbb{P}\left(X=0\right)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$. Dès lors,

$$\mathbb{P}\left(Y=1\right)=\frac{8}{15}.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}\left(X=1\mid Y=1\right)=\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{8}{15}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

On peut noter que $\mathbb{P}\left(X=1\right)=\frac{1}{2}$*. Finalement,* $\left(X=1\right)$ *et* $\left(Y=1\right)$ *sont indépendants.*

$\square$