Programme de colles 15
Géométrie et révisions

Quinzaine du 15 au 26 juin

Géométrie du plan

1. Repère du plan. Coordonnées dans un repère, changement de repère, coordonnées polaires.
2. Cas du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$ et de la norme euclidienne associée.
3. Bases/repères orthonormés directs. Matrice de passage entre deux bases orthonormées directes.
4. Formulation géométrique du produit scalaire et du déterminant. Aire d'un parallélogramme.
5. Equations paramétriques et cartésiennes d'une droite.
6. Distance d'un point à une droite, projeté orthogonal d'un point/vecteur sur une droite. *La formule doit être réétablie à chaque fois.*
7. Equation cartésienne d'un cercle.
8. Projection, symétrie vectorielle sur une droite. Matrice d'une telle application.
9. Définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel quelconque.

Géométrie de l'espace

1. Repères, coordonnées cartésiennes, cylindriques, changement de repère.
2. Produit scalaire canonique et déterminant en dimension 3.
3. Définition du produit vectoriel, calcul, orthogonalité de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
4. Repère/base orthonormé direct.
5. Formulation géométrique du produit scalaire et du produit vectoriel. Produit mixte, aire du parallélogramme, volume du parallélépipède.
6. Equations cartésiennes et paramétriques de droites et de plans.
7. Calcul (aucune théorie faite en classe) d'un déterminant de taille quelconque.
8. Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan. Distance à la droite ou au plan.
9. Equations de sphères.

Révisions !

Tout le programme depuis le début d'année.

Questions de cours

1. Définir un produit scalaire.
2. Enoncer les propriétés de la norme euclidienne.
3. Donner les formules géométriques du produit scalaire et du déterminant dans le plan.
4. Définir le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.
5. Donner la définition d'un déterminant sur $(\mathbb{R}^n)^n$.
6. Enoncer les propriétés du déterminant.
7. Caractériser par le déterminant le fait qu'un point appartiennent au plan (ABC).
8. Définir le produit vectoriel.

Démonstrations

Pas de démonstration de colle cette semaine mais elle commencera par un petit calcul d'un déterminant (en dimension 3 ou plus) ou par démontrer qu'une application est un produit scalaire (mais cela ne doit pas dépasser 10 minutes).

1. Démontrer qu'une application *(choisie par l'examinateur)* est un produit scalaire.
2. Calculer un déterminant *(choisi par l'examinateur).*

Les réponses du cours

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant
   - *(bilinéarité)* Pour tout $(x, y, x', y) \in E^4$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\langle \lambda\, x + \mu x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x', y \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle x, \lambda\, y + \mu y' \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, y' \rangle .$$
   - *(symétrie)* Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
   - *(positive)* Pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle \geqslant 0$.
   - *(définie)* Pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle = 0 \;\Rightarrow\; x = 0_E$.
2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\|\cdot\|$ une norme sur E, $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,
   - *(définie)* $\|x\| = 0_{\mathbb{R}} \;\Rightarrow\; x = 0_E$
   - *(positivité)* $\|x\| \geqslant 0$
   - *(pseudo-linéarité)* $\|\lambda\, x\| = |\lambda| \, \|x\|$
   - *(norme de la somme)* $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$
   - *(Pythagore)* si x et y sont orthogonaux alors, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors,
   $$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ \det(\vec{u}, \vec{v}) &= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$
4. Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan et $\vec{v}$ un vecteur du plan. Le projeté orthogonal du $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est défini comme étant le vecteur
   $$p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$
5. Le déterminant est l'unique application det de $(\mathbb{R}^n)^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(C_1, \ldots, C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
   (a) *(n-linéarité)* $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\forall C_i' \in \mathbb{R}^n$,
   $$\det(C_1, \ldots, \lambda\, C_i + \mu C_i', \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) + \mu \det(C_1, \ldots, C_i', \ldots, C_n) .$$
   (b) *(alternance)* $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $i \neq j$, on a
   $$\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -\det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n) .$$
   (c) *(normalisation)* Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\det(\mathscr{C}) = 1$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a
   - Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda\, A) = \lambda^n \det(A)$.
   - Pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
   - $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \;\Leftrightarrow\; \det(A) \neq 0$. Et dans ce cas, $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
   - $\det\left(A^T\right) = \det(A)$.
7. Soient A, B, C et M quatre points de l'espace. Alors,
   $$M \in (ABC) \qquad \Leftrightarrow \qquad \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0.$$
8. Le produit vectoriel $\cdot \wedge \cdot$ est l'unique application de $\left(\mathbb{R}^3\right)^2$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant pour tout $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u'}, \vec{v'}\right) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^4$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
   - *(bilinéarité)* $\left(\lambda\, \vec{u} + \mu \vec{u'}\right) \wedge \vec{v} = \lambda\, \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu \vec{u'} \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \left(\lambda\, \vec{v} + \mu \vec{v'}\right) = \lambda\, \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu\, \vec{u} \wedge \vec{v'}$.
   - *(anti-symétrie)* $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
   - Si $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3}$, $\vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \vec{e_1}$ et $\vec{e_3} \wedge \vec{e_1} = \vec{e_2}$.