Programme de colles 05
Calcul de primitives et équations différentielles d'ordre 1

Quinzaine du 24 novembre au 05 décembre

Calcul d'intégrales et de primitives

1. Définition d'une primitive. En cas d'existence, description de l'ensemble des primitives.
2. Définition des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
3. Théorème fondamental de l'analyse : existence d'une primitive F de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans le cas continu (sans démonstration) et unicité sous condition $F(A) = a$.
4. Corollaire $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.
5. Propriétés de l'intégrale : inversion des bornes, linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$: croissance, positivité et séparation (intégrale nulle d'une fonction continue et positive).
6. Intégrations par parties de deux fonctions $\mathscr{C}^1$.
7. Formule de changement de variable.
8. Primitives usuelles.
9. Intégration d'inverses de trinômes. Décomposition en éléments simples dans le cas de pôles simples (sinon guider la forme).

Equations différentielles d'ordre 1

1. Définition. Equation homogène associée.
2. Propriété de stabilité par combinaisons linéaires de l'espace homogène.
3. Notation sous forme d'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(f)$ ou $\mathrm{Vect}\,(f, g)$. *Juste la notation.*
4. Résolution de l'équation homogène.
5. Ensemble des solutions de l'équation non homogène à l'aide d'une solution.
6. Principe de superposition.
7. Méthode de variation de la constante.
8. Problème de Cauchy d'une équation différentielle d'ordre 1, existence et unicité.
9. Problème de raccord.

Questions de cours

1. Définir une fonction $\mathscr{C}^1$.
2. Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
3. Enoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.
4. Enoncer la croissance de l'intégrale.
5. Enoncer la séparation de l'intégrale.
6. Enoncer le théorème d'intégration par parties.
7. Enoncer le théorème de changement de variable.
8. Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions d'une équation homogène d'ordre 1.
9. Enoncer la proposition qui affirme que l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.
10. Enoncer le théorème donnant l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à partir d'une solution « particulière ».
11. Enoncer le principe de superposition.
12. Définir un problème de Cauchy. Propriété ?

Démonstrations de cours

1. Déterminer les primitives de la fonction ln.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer les solutions de $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Les réponses du cours

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est $\mathscr{C}^1$ sur I noté $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ si et seulement si
   - f est dérivable sur I
   - f' est continue sur I.
2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $A \in \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$. Si f est continue sur I alors la fonction F définie par
$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$
   est $\mathscr{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f telle que $F(a) = A$.
3. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}([a; b], \mathbb{K})$. Alors,
$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
4. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $a < b$, et $(f, g) \in \mathscr{C}([a; b], \mathbb{R})^2$ telles que
$$\forall t \in [a; b], \qquad f(t) \leqslant g(t).$$
   Alors,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
5. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$ et $f \in \mathscr{F}([a; b], \mathbb{R})$. On suppose que
   - La fonction f est continue sur $[a; b]$,
   - la fonction f est positive sur $[a; b]$,
   - $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

   Alors pour tout $t \in [a; b]$, $f(t) = 0$.
6. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et u et v deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a; b]$. Alors
$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$
7. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to J$ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur I, $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur J. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$
8. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a une fonction continue sur I, A une primitive de a sur I alors l'ensemble des solutions de
$$(E_0) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = 0$$
   est donnée par
$$\mathscr{S}_0 = \operatorname{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-A(x)} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-A(x)} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$
9. L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions d'une équation homogène vérifie :
   - La fonction nulle est dans $\mathscr{S}_0$
   - Pour tout $(f, g) \in \mathscr{S}_0^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathscr{S}_0$.
10. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et b deux fonctions continues sur I, y_p une solution de
$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$
    et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de
$$(E_0) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$
    Alors, $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E) est donné par
$$\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_0 = \{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathscr{S}_0 \}.$$

11. Soient I un intervalle, a, b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I, y_1 une solution de
$$(E_1) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x)$$
et y_2 une solution de
$$(E_2) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_2(x).$$
Alors, $y_1 + y_2$ est une solution de
$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x) + b_2(x)$$

12. Soient I un intervalle, a et b deux fonctions continues sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ alors le problème suivant d'inconnue y une fonction dérivable sur I est un problème de Cauchy
$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
De plus, tout problème de Cauchy admet une et une seule solution.

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Montrons que l'ensemble des primitives de la fonction ln est donné par
$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) - x + K \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}.$$

Démonstration. La fonction ln est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $1 \in \mathbb{R}_+^*$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse,
$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$
est LA primitive de ln qui s'annule de 1. Posons
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = \ln(t). \end{cases}$$
Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = \frac{1}{t}. \end{cases}$$
Donc par le théorème d'intégration par parties, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [t\ln(t)]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x t\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x) - \int_1^x 1\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x) - x + 1. \end{aligned}$$
Conclusion, l'ensemble des primitives de la fonction ln est donné par
$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) - x + K \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}.}$$
□

Proposition (démo 2)

Calculons $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. Pour tout $x \in [0;\ln(2)]$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $1+\mathrm{e}^x \neq 0$. Donc $x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ est continue sur $[0;\ln(2)]$ donc $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ existe. Posons $t = \mathrm{e}^x$ i.e. $x = \ln(t)$. Si $x = 0$, $t = 1$ et si $x = \ln(2)$, $t = 2$. De plus, la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[1;2]$ et $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Dès lors, par changement de variable,

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{1}{(1+t)\,t}\,\mathrm{d}t.$$

Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}, \quad h(t) = \frac{1}{(1+t)\,t} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t}.$$

Or

$$a = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} t h(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{1}{1+t} = 1.$$

De même,

$$b = \lim_{\substack{t\to -1\\ t\neq -1}} (1+t)\,h(t) = \lim_{\substack{t\to -1\\ t\neq -1}} \frac{1}{t} = -1.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\ln(|t|) - \ln(|1+t|)\right]_{t=1}^{t=2} \\ &= \ln(2) - \ln(3) - \ln(1) + \ln(2) \\ &= 2\ln(2) - \ln(3) \\ &= \ln\left(\frac{4}{3}\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{4}{3}\right).}$$

□

Proposition (démo 3)

Déterminons les solutions de

$$(E)\ : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

Démonstration. L'équation homogène associée à (E) est

$$(E_0)\ : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0.$$

La fonction $a : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives dont l'une est donnée par $A : x \mapsto \ln(x)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$. Ainsi l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\mathscr{S}_0 = \mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{K}{x} \end{array} \,\middle|\, K \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{K}{x} \end{array} \right).$$

Posons $y_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons $\lambda = \frac{y}{y_0}$. Puisque y_0 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, λ est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \begin{aligned} y(x) &= \lambda(x) y_0(x) \\ y'(x) &= \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x) + \frac{1}{x} \lambda(x) y_0(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) \underbrace{\left(y_0'(x) + \frac{1}{x} y_0(x) \right)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0} = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) \underbrace{=}_{y_0(x) \neq 0} \frac{\mathrm{e}^x}{x y_0(x)} = \mathrm{e}^x \\
&\Leftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda(x) = \mathrm{e}^x + K \\
&\Leftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \frac{\mathrm{e}^x + K}{x}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^x + K}{x} \end{array} \,\middle|\, K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

$\square$