# Programme de colles 07
# Matrices et Analyse asymptotique

*Quinzaine du 05 au 16 janvier*

## Calcul matriciel

1. Définition d'une matrice, d'un vecteur ligne ou colonne. Addition de deux matrices et multiplication par un scalaire.
2. Produit matriciel et compatibilité avec l'addition.
3. Définition des matrices carrées et de la matrice identité. Non-intégrité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Stabilité.
5. Définition de la puissance d'une matrice. Formule du binôme de Newton et égalité de Bernoulli lorsque les matrices commutent.
6. Matrices inversibles. Théorème admis : si une matrice est inversible à droite ou à gauche alors elle est inversible. Inverse du produit.
7. Transposée d'une matrice. Linéarité. Transposée d'un produit.
8. Matrices symétriques, antisymétriques, stabilité des ensembles.
9. Trace d'une matrice. Linéarité. Trace d'un produit.
10. Lien entre un système linéaire et une équation matricielle, version matricielle des opérations élémentaires.
11. Caractérisation de l'inverse d'une matrice en étant équivalente à $I_n$. Cas des matrices diagonales ou triangulaires.
12. Calcul de l'inverse d'une matrice.
13. Résolution de systèmes linéaires par l'algorithme de Gauss. Cas de systèmes à paramètre.

## Analyse asymptotique

1. Négligeabilité : définition par la limite du quotient. Notation $\ll$ ou $o$. Nouvelles croissances usuelles.
2. Propriétés algébriques des $o$ : transitivité, somme, produit, absorption des constantes, inverse.
3. Equivalence : définition par la limite du quotient. Lien avec $o$.
4. Deux équivalents ont même nature (convergence ou divergence), même limite (lorsqu'elle existe) et même signe (lorsqu'il est fixe).
5. Théorème d'encadrement des équivalents.
6. Opérations algébriques sur les équivalents : produit, élévation à une puissance fixe, passage à l'inverse notamment, passage à la valeur absolue. Changement de variables. Equivalents usuels.
   **Anti-proposition : interdit de sommer, de composer les équivalents, d'écrire équivalent à $0$.**
7. Développements limités en 0, en $x_0$. Unicité, troncature. Cas des fonctions paires ou impaires en 0.
8. DL et continuité/dérivabilité. Toute fonction $\mathscr{C}^n$ admet un DL d'ordre $n$.
9. DL usuels : $e^x$, cos, sin, tan (à l'ordre 5), ch, sh, arctan, $(1+x)^\alpha$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$.
10. Somme, produit, composée et quotient de DL.
11. Primitivation des développements limités. Théorème de Taylor-Young.
12. Application : recherche de limites, d'asymptote, de tangente, position par rapport à la tangente au voisinage.
13. Rapide complément sur la domination.

# Questions de cours

On demandera à chaque étudiant de réciter un développement usuel ($e^x$, $\text{ch}(x)$, $\text{sh}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $(1+x)^\alpha$, $\arctan(x)$) à un ordre autour de 4 ou 5 puis une question de cours et une démonstration.

1. Donner la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice.
2. Enoncer la formule de Bernoulli et du binôme de Newton pour deux matrices.
3. Enoncer la proposition donnant l'inverse du produit.
4. Enoncer la propriété donnant la transposée du produit.
5. Définir une matrice symétrique/antisymétrique.
6. Enoncer les opérations élémentaires.
7. A l'aide des opérations élémentaires donner la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice.
8. Enoncer la proposition reliant l'équivalence et la négligeabilité entre deux fonctions (Prop II.3).
9. Si deux fonctions sont équivalentes, que dire de leur comportement asymptotique ? (Prop II.4)
10. Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.
11. Enoncer le théorème d'encadrement des équivalents.
12. Donner une condition nécessaire à l'existence d'un développement limité à l'ordre $n$. Préciser le cas $n = 0$ et $n = 1$.
13. Enoncer l'unicité du développement limité.
14. Enoncer la propriété permettant de primitiver un développement limité.
15. Enoncer la formule de Taylor-Young.

# Démonstrations de cours

1. Calculer les puissances de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en $x = 1$ de $f : x \mapsto \cos(\ln(x))$.
3. Sachant que $f(x) = \ln(\text{ch}(x)) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$, déterminer le développement limité de $g(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

# Les réponses du cours

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $A$ est inversible
   (b) $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n$
   (c) $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ BA = I_n$

   De plus dans chacun des cas, $B = A^{-1}$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On suppose que $A$ et $B$ commutent i.e. $AB = BA$ alors,
   (a) $(A+B)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$.
   (b) Si $m \neq 0$, $A^m - B^m = (A-B)\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $A$ et $B$ sont inversibles alors $AB$ est inversible et
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
4. Soient $(n, r, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K})$. Alors ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   - La matrice $M$ est symétrique $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si ${}^tM = M$.
   - La matrice $M$ est antisymétrique $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si ${}^tM = -M$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $i \neq j$, les trois opérations élémentaires pour les lignes sont
   - La permutation de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$.
   - La dilatation d'une ligne : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, **non nul**, $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
   - La transvection : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \Leftrightarrow \qquad A \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_n \qquad \Leftrightarrow \qquad A \underset{\mathscr{C}}{\sim} I_n.$$
8. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $I$ un voisinage de $a$, $f$ et $g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Alors
$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x)).$$
9. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $I$ un voisinage de $a$, $f$ et $g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.
   (a) Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ alors $f$ et $g$ ont le même comportement en $a$ : si $f$ converge, $g$ aussi et si $f$ diverge, $g$ aussi. De plus dans tous les cas $f$ et $g$ ont le même signe au voisinage de $a$.
   (b) Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$. On a
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \underset{x \to a}{\sim} \ell.$$
10. Sur les équivalents, il est possible de
    - multiplier,
    - d'élever à la puissance (éventuellement négative et donc de passer à l'inverse),
    - de passer à la valeur absolue,
    - de faire un changement de variable.

    Il est cependant interdit
    - de sommer des équivalents,
    - de composer des équivalents par une fonction,
    - d'écrire équivalent à 0.

11. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $I$ un voisinage de $a$ et $(f, g, h) \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})^3$ tels que

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x).$$

Alors, par le théorème d'encadrement des équivalents,

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x).$$

12. Soient $I$ un voisinage de 0 et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.
    (a) $f$ est continue en 0 si et seulement si $f$ admet un développement limité à l'ordre 0 en 0. Dans ce cas $f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + o(1)$.
    (b) $f$ est dérivable en 0 si et seulement si $f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Dans ce case, $f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$.
    (c) **SI** $f$ est $\mathscr{C}^n$ **ALORS** $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$.
13. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

Alors, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $a_k = b_k$.

14. Soient $I$ un voisinage de 0 et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0 donné par

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n), \qquad (a_k)_{k \in [\![0\,;n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$ alors $F$ admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 donné par

$$F(x) \underset{x \to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

15. Soit $a \in \mathbb{R}$, $I$ un voisinage de $a$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ en $a$ alors $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en $a$ donné par

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

# Démonstrations de cours

**Proposition (démo 1)**

Calculons les puissances de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Démonstration.** Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On observe que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

Dès lors, pour tout $n \geqslant 2$, $N^n = O_3$. De plus $B = I_3 + N$ et les matrices $I_3$ et $N$ **commutent**. Dès lors, par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
B^n &= (I_3 + N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \\
&= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N + O_3 \qquad \text{car } n \geqslant 1 \text{ et pour tout } k \geqslant 2,\ N^k = O_3 \\
&= I_3 + nN \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On observe que la formule reste vraie si $n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

**Proposition (démo 2)**

Calculons le développement limité à l'ordre 3 en $x = 1$ de $f : x \mapsto \cos(\ln(x))$.

**Démonstration.** Posons $h = x - 1$ i.e. $x = 1 + h$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos(\ln(x)) \\
&= \cos(\ln(1+h)) \\
&\underset{h\to 0}{=} \cos\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o\left(h^3\right)\right).
\end{aligned}$$

Posons $u(h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o\left(h^3\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

- on a

$$\begin{aligned}
u(h)^2 &\underset{h\to 0}{=} \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o\left(h^3\right)\right)\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o\left(h^3\right)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \begin{array}{ccc} h^2 & -\frac{h^3}{2} & +o\left(h^3\right) \\ & -\frac{h^3}{2} & +o\left(h^3\right) \\ & & +o\left(h^3\right) \end{array} \\
&\underset{h\to 0}{=} h^2 - h^3 + o\left(h^3\right).
\end{aligned}$$

- De plus, $u(h) \underset{h\to 0}{\sim} h$ donc par élévation à la puissance, $u(h^3) \underset{h\to 0}{\sim} h^3$ i.e.

$$u(h)^3 \underset{h\to 0}{=} h^3 + o\left(h^3\right).$$

- Enfin,

$$o\left(u(h)^3\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(h^3 + o\left(h^3\right)\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(h^3\right).$$

Or $\cos(u) \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o\left(u^3\right)$. Ainsi,

$$f(x) \underset{h\to 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2} + o\left(h^3\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 1}{=} 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{2} + o\left((x-1)^3\right).}$$

□

**Proposition (démo 3)**

Sachant que $f(x) = \ln(\mathrm{ch}(x)) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$, déterminer le développement limité de $g(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ à l'ordre 3 en 0.

**Démonstration.** La fonction $g$ est définie et même $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1$). Donc par le théorème de Taylor-Young, la fonction $g$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 : il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o\left(x^3\right).$$

De plus, on observe que $f$ est une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$. Dès lors, par le théorème de primitivation du développement limité,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_3}{4}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Or $f(0) = \ln(\mathrm{ch}(0)) = \ln(1) = 0$ et par hypothèse $f(x) = \ln(\mathrm{ch}(x)) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$. Donc par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{a_2}{3} = 0 \\ \frac{a_3}{4} = -\frac{1}{12} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a_0 = a_2 = 0 \text{ (cohérent avec l'imparité de } g) \\ a_1 = 1 \\ a_3 = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).}$$

□