Programme de colles 08 bis
Ensembles, applications, continuité, dérivabilité

Semaine du 2 au 6 février

Ensembles et applications

Identique au programme 8 :

1. **Ensembles :** A partir de l'appartenance, définition de l'inclusion et de l'égalité de deux ensembles. L'inclusion est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. Définition d'une partie d'un ensemble E et de l'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$.
3. Intersection et union : définition, commutativité, associativité. Ensembles disjoints.
4. Complémentaire $\overline{A}$, différence de deux ensembles. Propriétés (lois de Morgan...).
5. Produit cartésien d'ensembles.
6. **Applications :** définition, image, antécédent, graphe.
7. Application identité, fonctions indicatrices.
8. Composition, restriction, prolongement.
9. Image directe, image réciproque. Image directe et réciproque de l'union, de l'intersection.
10. Injection, surjection, bijection.

Limite, Continuité, Dérivation

1. Définition de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Unicité de la limite. Limite à droite, à gauche. Somme, produit, quotient, valeur absolue de limites. Composition de limites. Passage à la limite dans les inégalités.
3. Si f admet une limite finie alors, f est bornée.
4. Théorème d'encadrement, de majoration, de minoration. Théorème de la limite monotone. Caractérisation séquentielle de la limite.
5. Continuité : définition. Continuité à droite, à gauche. Prolongement par continuité. Caractérisation séquentielle de la continuité.
6. Algorithme de dichotomie, théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Théorème de la bijection. Image d'un segment par une fonction continue.
7. Définition de la dérivabilité en ε, dérivabilité à droite, à gauche. Rappel du lien avec un DL à l'ordre 1 et avec la tangente.
8. Fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$, formule de Leibniz.
9. Tout extremum intérieur est un point critique, théorème de Rolle.
10. **A partir de mardi :** Identité des accroissements finis. Lien entre la monotonie de f et le signe de f'.
11. Théorème des accroissements finis, définition d'une fonction lipschitzienne. Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$.
12. Extension aux fonctions complexes : caractérisation avec les parties réelles et imaginaires, théorème des accroissements finis.

Questions de cours

1. Enoncer la distribution de l'intersection sur l'union et réciproquement puis énoncer les lois de Morgan pour les ensembles.
2. Définir l'ensemble image et l'ensemble réciproque.
3. Définir l'injectivité et la surjectivité.
4. Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse (Prop II.16).
5. Enoncer le théorème d'encadrement.
6. Enoncer la caractérisation séquentielle de la limite.
7. Enoncer le théorème des bornes atteintes.
8. Enoncer l'identité des accroissements finis.

Démonstrations de cours

1. Démontrer les deux assertions suivantes :
   (a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.
   (b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.
2. Démontrer les deux assertions suivantes :
   (a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
   (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. Montrer que si f est dérivable sur un intervalle I, alors f est lispchitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I.

Les réponses du cours

1. Soient E un ensemble et $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Alors,
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E,F)$. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Alors,
$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$
3. Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E,F)$.
$$\begin{array}{rcl} f \text{ est injective} & \Leftrightarrow & \forall (x,y) \in E^2,\ (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y). \\ f \text{ est surjective} & \Leftrightarrow & \forall y \in F,\ \exists x \in E, \quad y = f(x). \end{array}$$
4. Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E,F)$. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{F}(F,E)$ telle que
$$f \circ g = \mathrm{Id}_F \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$
De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.
5.
6. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f, g et h trois éléments de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On suppose que
   - pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,
   - il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$.

   Alors on a également $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
7. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Alors les deux points suivants sont équivalents :
   (a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$
   (b) pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a, on a $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l.
8. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur le segment $[a;b]$. Alors, f est bornée sur $[a;b]$ et atteint ses bornes :
$$\exists (\alpha,\beta) \in [a;b]^2,\ f(\alpha) = m = \min_{t\in[a;b]} f(t) \text{ et } f(\beta) = M = \max_{t\in[a;b]} f(t).$$
9. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Démonstrations de cours

Proposition (démo 1)

Soient E, F, G trois ensembles, $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$.
1. $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.
2. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.

Démonstration.

1. Supposons $g \circ f$ injective i.e. $\forall (x,y) \in E^2$, $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$. Montrons que f est injective. Soient $(x,y) \in E^2$. Montrons que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Supposons $f(x) = f(y)$. Alors, $g(f(x)) = g(f(y))$. Donc $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Or $g \circ f$ est injective. Donc $x = y$. Conclusion, $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ et $\boxed{f \text{ est bien injective}}$.

2. Supposons $g \circ f$ surjective i.e. $\forall z \in G$, $\exists x \in E$, $z = g \circ f(x)$. Montrons que g est surjective. Soit $z \in G$. Par la surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$. Posons $y = f(x) \in F$, alors on a $z = g(y)$. Dès lors, $\forall z \in G$, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Conclusion, $\boxed{g \text{ est surjective}}$.

$\square$

Proposition (démo 2)

Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$.

1. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$, alors $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
2. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, alors $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Démonstration.

1. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Montrons $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Soit $x \in E$. On a
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow \quad f(x) \in A \text{ ET } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \text{ ET } x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).}$$
2. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrons que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Soit $y \in F$. On a
$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists x_1 \in A,\ y = f(x_1)) \text{ OU } (\exists x_2 \in B,\ y = f(x_2)) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in f(A) \text{ OU } y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$
Conclusion
$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).}$$

$\square$

Proposition (démo 3)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. On a
$$f \text{ lipschitzienne sur } I \quad \Leftrightarrow \quad f' \text{ est bornée sur } I.$$

Démonstration. Supposons f lispchitzienne sur I. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|.$$
Soit $x \in I$. Pour tout $y \in I$, $y \neq x$, on a donc
$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leqslant k \quad \Leftrightarrow \quad -k \leqslant \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant k.$$
Donc par passage à la limite quand $y \to x$, puisque f est dérivable sur I et donc en x en particulier, on a
$$-k \leqslant \lim_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(x) \leqslant k \qquad \text{car la constante } k \text{ ne dépend pas de } y$$
Ainsi,
$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant k.$$
Donc f' est bornée.
Réciproquement, supposons f' bornée. Alors, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant M.$$
Soient $(x, y) \in I^2$, $x \neq y$. Puisque f est dérivable sur I, alors f est continue sur I et donc

- f est continue sur $[x; y]$,
- f est dérivable sur $]x; y[$.

Donc par l'identité des accroissements finis,

$$\exists c \in \left]x; y\right[, \quad f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Ainsi,

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| \leqslant M.$$

Donc

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x - y|\,,$$

ce qui reste vrai si $x = y$. D'où

$$\forall\,(x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x - y|$$

et f est M-lipschitzeinne. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ lipschitzienne sur } I \qquad \Leftrightarrow \qquad f' \text{ est bornée sur } I.}$$

$\square$