

Programme de colles 09

Continuité, dérivabilité et suites numériques

Quinzaine du 23 février au 6 mars

Limite, Continuité, Dérivation

1. Définition de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Unicité de la limite. Limite à droite, à gauche. Somme, produit, quotient, valeur absolue de limites. Composition de limites. Passage à la limite dans les inégalités.
3. Si f admet une limite finie alors, f est bornée.
4. Théorème d'encadrement, de majoration, de minoration. Théorème de la limite monotone. Caractérisation séquentielle de la limite.
5. Continuité : définition. Continuité à droite, à gauche. Prolongement par continuité. Caractérisation séquentielle de la continuité.
6. Algorithme de dichotomie, théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Théorème de la bijection. Image d'un segment par une fonction continue.
7. Définition de la dérivabilité en ε , dérivabilité à droite, à gauche. Rappel du lien avec un DL à l'ordre 1 et avec la tangente.
8. Fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$, formule de Leibniz.
9. Tout extremum intérieur est un point critique, théorème de Rolle.
10. Identité des accroissements finis. Lien entre la monotonie de f et le signe de f' .
11. Théorème des accroissements finis, définition d'une fonction lipschitzienne. Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$.
12. Extension aux fonctions complexes : caractérisation avec les parties réelles et imaginaires, théorème des accroissements finis.

Suites numériques

1. mode de définition d'une suite réelles : de façon explicite, implicite, par récurrence (simple ou double).
2. Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : expressions explicites.
4. Suites monotones. Suites convergentes, divergentes. Une suite convergente est bornée.
5. Une suite est bornée si et seulement la suite des valeurs absolues est majorée.
6. Une suite est asymptotiquement du même signe que sa limite (si celle-ci existe et est non nulle).
7. Si $u_n \rightarrow l$ alors $|u_n| \rightarrow |l|$ avec réciproque si $l \neq 0$.
8. Théorème d'encadrement et de convergence monotone.
9. Définition d'une suite extraite. Si la suite converge alors toute suite extraite converge vers la même limite. Réciproque si la suite des termes pairs et la suite des termes impairs convergent vers la même limite.
10. Suites adjacentes. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
11. Moyenne de Cesàro. Si la suite converge alors sa moyenne de Cesàro converge vers la même limite.
12. Suites complexes : définition de la limite. Toute suite complexe qui converge est bornée, unicité de la limite, opérations sur les limites.
13. Caractérisation de la convergence avec les parties réelles et imaginaires.
14. Suites récurrentes linéaires complexes d'ordre 2.

Questions de cours

1. Énoncer le théorème d'encadrement.
2. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.
3. Énoncer le théorème des bornes atteintes.

4. Énoncer l'identité des accroissements finis.
5. Donner la définition de deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire ?
6. Définir la convergence d'une suite complexe (définition IV.1).
7. Donner une condition suffisante pour qu'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ soit croissante et comment le démontre-t-on ?
8. Donner la forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
9. Donner la définition d'une suite extraite. Quand est-ce qu'une suite extraite converge-t-elle ?

Démonstrations de cours

1. Démontrer que $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f'(0)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n l'unique solution sur $[0; \frac{1}{2}]$ de $x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
3. On pose $u_0 = -\frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Les réponses du cours

1. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a , f, g et h trois éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On suppose que

- pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,
- il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$.

Alors on a également $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

2. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors les deux points suivants sont équivalents :

(a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

(b) pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers a , on a $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers l .

3. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction continue sur le segment $[a; b]$. Alors, f est bornée sur $[a; b]$ et atteint ses bornes :

$$\exists (\alpha, \beta) \in [a; b]^2, f(\alpha) = m = \min_{t \in [a; b]} f(t) \text{ et } f(\beta) = M = \max_{t \in [a; b]} f(t).$$

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

5. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Deux suites adjacentes convergent et vers la même limite.

6. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si la suite réelle $(|u_n - l|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f est croissante et que $u_1 \geq u_0$. Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On le démontre par récurrence bien sûr !

8. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Soit Δ le discriminant de $(E_c) : r^2 - ar - b$.

- Si $\Delta > 0$, alors en notant r_1 et r_2 les deux racines de (E_c) ,

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- Si $\Delta = 0$, alors en notant r_0 l'unique racine de (E_c) ,

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n.$$

- Si $\Delta < 0$, alors en notant $r_1 = r e^{i\theta}$ et $r_2 = r e^{-i\theta}$ les deux racines complexes de (E_c) ,

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)).$$

9. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Si φ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$ alors la suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite ou encore une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ également et vers la même limite.

Démonstrations de cours

Proposition (démonstration 1)

La fonction $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Démonstration. On observe les points suivants.

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction $\cos$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction $\cos$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$. Or $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ donc

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u \neq 0}} \frac{\sin(u)}{u} = 1.$$

De plus, $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc par composée, f' admet une limite finie en 0^+ et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusion, par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

□

Proposition (démonstration 2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n l'unique solution sur $[0; \frac{1}{2}]$ de $x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$. Montrons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminons sa limite.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : x \mapsto x^n + x^2 + 2x - 1$. Comme somme de fonctions qui le sont, f_n est définie, continue et strictement croissante sur $[0; \frac{1}{2}]$. De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} + 1 - 1 = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} > 0$. Donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x_n \in [0; \frac{1}{2}]$ tel que $f_n(x_n) = 0$. De plus, pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}]$, $0 \leq x \leq 1$ donc $x^{n+1} \leq x^n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $x_n \in [0; \frac{1}{2}]$,

$$x_n^{n+1} + x_n^2 + 2x_n - 1 \leq x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad f_{n+1}(x_n) \leq f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Comme f_{n+1} est croissante sur $[0; \frac{1}{2}]$,

$$f_{n+1}(x_n) \leq f_{n+1}(x_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad x_n \leq x_{n+1}.$$

Donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ conclusion, par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

Bonus ! Pour les curieux : notons ℓ sa limite. Puisque $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$, on a $0 \leq x_n^n \leq \frac{1}{2^n}$ donc par encadrement, $x_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De plus, $x \mapsto x^2 + 2x - 1$ est continue en ℓ donc par caractérisation séquentielle de la continuité, $x_n^2 + 2x_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^2 + 2\ell - 1$. Dès lors,

$$0 = f_n(x_n) = x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + \ell^2 + 2\ell - 1.$$

Donc

$$0 = \ell^2 + 2\ell - 1.$$

Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = 4 + 4 = 8$. Donc $\ell = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$ ou $\ell = -1 - \sqrt{2}$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n \leq 1$ donc par passage à la limite $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$ et $-1 - \sqrt{2} < 0$. Conclusion,

$$\boxed{\ell = \sqrt{2} - 1.}$$

□

Proposition (démonstration 3)

On pose $u_0 = -\frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminons sa limite.

Démonstration. Posons $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1; 2]$. Donc par le théorème de la bijection,

$$f([-1; 2]) = [f(-1); f(2)] = [0; \sqrt{3}] \subseteq [-1; 2].$$

Donc $[-1; 2]$ est une partie stable par f . Dès lors, on démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [-1; 2]$. De plus, on a

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \geq -\frac{1}{2} = u_0.$$

Donc par croissance de f sur $[-1; 2]$,

$$u_2 = f(u_1) \geq f(u_0) = u_1.$$

En itérant, on obtient par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2. Conclusion, par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Bonus! Pour les curieux, notons ℓ la limite. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq 2$. Par passage à la limite, $\ell \in [-1; 2]$. De plus, l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) = u_{n+1}.$$

Or f est continue sur $[-1; 2]$ donc en ℓ . Donc par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell) = \sqrt{\ell+1}.$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$. Donc

$$\begin{aligned} \sqrt{\ell+1} = \ell &\Leftrightarrow \ell+1 = \ell^2 \text{ ET } \ell \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0 \text{ ET } \ell \geq 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 1 + 4 = 5$. Donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $\ell = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Or $\ell \geq 0$. Conclusion,

$$\boxed{\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

□