Devoir Maison 1
Logique et fonctions

A faire pour le mardi 23 septembre

Problème I - Logique et raisonnement

Pour tout couple d'assertions P et Q, on définit l'opérateur NAND par

$$\text{NAND}\,(P,Q)\ :\ \textit{non}\,(P \text{ ET } Q)\,.$$

1. Soient P et Q deux assertions. Montrer que l'on peut exprimer $\text{NAND}(P,Q)$ uniquement en fonction des opérateurs *non* et OU et des assertions P et Q.
2. Soit P une assertion. Montrer que l'on peut exprimer $\textit{non}(P)$ uniquement en fonction de l'opérateur logique NAND et de l'assertion P *(que l'on pourra utiliser plusieurs fois)*.
3. Soient P et Q deux assertions. Montrer que l'on peut exprimer P OU Q uniquement en fonction de l'opérateur NAND et des assertions P et Q.
4. Soient P et Q deux assertions. Simplifier au maximum l'expression $\text{NAND}\,(\text{NAND}\,(P,Q)\,,\text{NAND}\,(P,Q))$.
5. Soient P et Q deux assertions. Montrer que l'on peut exprimer $P \Rightarrow Q$ uniquement en fonction de l'opérateur NAND et des assertions P et Q.
6. Soient P et Q deux assertions. Montrer que l'on peut exprimer $P \Leftrightarrow Q$ uniquement en fonction de l'opérateur NAND et des assertions P et Q.

NB : On dit qu'un connecteur est ***universel*** *s'il permet d'exprimer à lui seul les connecteurs non, ET et OU .*

Problème II - Continuité vs Continuité uniforme

On note $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et on considère les assertions suivantes

$$\mathscr{C}(f)\ :\ \text{« } \forall \varepsilon \in \,]0;1]\,, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists \eta \in \,]0;1]\,, \forall y \in \mathbb{R}_+, \quad (|x-y| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon) \text{ ».}$$
$$\mathscr{U}(f)\ :\ \text{« } \forall \varepsilon \in \,]0;1]\,, \exists \eta \in \,]0;1]\,, \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad (|x-y| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon) \text{ ».}$$

1. Soient $f \in F$, $\varepsilon \in \,]0;1]\,$, $\eta \in \,]0;1]\,$, $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$. Enoncer la réciproque, la contraposée et la négation de l'implication
$$P\ :\ \text{« } |x-y| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon \text{ ».}$$
2. Soit $f \in F$. Enoncer la négation de $\mathscr{C}(f)$ et de $\mathscr{U}(f)$.
3. Soient $a \geqslant 1$ et $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & ax \end{array}$.
   (a) Soient $\eta \in \,]0;1]$ et $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $|x-y| \leqslant \eta$. Déterminer un majorant de $|f(x)-f(y)|$ en fonction uniquement de a et η.
   (b) Soit $\varepsilon \in \,]0;1]$. Déterminer $\underline{\eta \in \,]0;1]}$ pour que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2\,,\ |x-y| \leqslant \eta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$.
   (c) En déduire que $\mathscr{U}(f_a)$ est vraie.

On fixe dans la suite $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

4. Soient $\varepsilon \in \,]0;1]$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $\eta = \frac{\varepsilon}{2x+1}$.
   (a) Justifier que $\eta \in \,]0;1]$.
   (b) Justifier que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, si $|x-y| \leqslant \eta$ alors $x+y \leqslant 2x+\eta \leqslant 2x+1$.
   (c) En déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, si $|x-y| \leqslant \eta$, alors $|g(x)-g(y)| \leqslant \eta\,(2x+1)$.
   (d) Que peut-on en déduire ? Justifier.
5. On fixe $\varepsilon = 1$. Soit $\eta \in \,]0;1]$. On pose $y = \frac{1}{\eta}$ et $x = \frac{1}{\eta} + \eta$.
   (a) Montrer que $|x-y| \leqslant \eta$ et que $|g(x)-g(y)| > 1$.
   (b) Que peut-on en déduire ? Justifier.
6. Pour tout $f \in F$, déterminer une implication entre $\mathscr{C}(f)$ et $\mathscr{U}(f)$ puis justifier que la réciproque est fausse en général.

Problème III - Fonctions réelles

On considère les fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto 2x^3 - 1 + 2\ln(x) \qquad \text{et} \qquad f : x \mapsto 2x - \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Partie 1 : Quand $\mathbb{R}_+^*$ est en bijection avec $\mathbb{R}$

1. Déterminer I le domaine de définition de g.
2. Déterminer la parité de g.
3. Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
4. Dresser le tableau de variations de g.
5. Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $g(\alpha) = 0$.
6. Justifier que $\alpha \in \left]\frac{1}{2};1\right[$.
7. Quel est le signe de $\ln(\alpha)$? En déduire que $2\alpha^3 - 1 > 0$.

Partie 2 : Lorsque f déprime, il peut s'appuyer sur g

8. Justifier que f est bien définie et dérivable sur I.
9. Exprimer sa dérivée en fonction de g.
10. Déterminer le tableau de variation complet de f en fonction de α et $\beta = f(\alpha)$.
11. La fonction f est-elle majorée ? minorée ? bornée ?
12. Montrer que $\beta > 1$.
13. On note γ l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]0;\alpha[$. Sans justification, déterminer (éventuellement en fonction de α, β ou γ) les ensembles suivants :
   (a) $f(]0;1[)$ (b) $f([\alpha;+\infty[)$ (c) $f^{\leftarrow}([1;+\infty[)$ (d) $f^{\leftarrow}([2;+\infty[)$
14. Montrer que le graphe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on déterminera l'équation.
15. Déterminer la position relative du graphe de f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.
16. Donner une représentation graphique du graphe de f.