Devoir Maison 10
Probabilités et intégration

A faire pour le mardi 12 mai

Problème I - Probabilités

Soit $n \geqslant 4$. On possède trois urnes, l'urne 0 contient n boules blanches, l'urne 1 contient 1 boule noire et $n-1$ boules blanches et l'urne 2 contient 2 boules noires et $n-2$ boules blanches. On choisit une urne et on pioche alors successivement, sans remise, et de façon indépendante n fois dans la **même** urne. On note $(\Omega, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de ce problème.

1. On suppose dans cette question que l'on pioche dans l'urne 1. Soit X_0 le rang d'apparition de la boule noire. Sans calcul mais en justifiant, déterminer la loi de X_0.

Partie 1 : On ne dit pas la boîte rit jaune aux toilettes mais l'urne rit noir

On suppose dans cette partie que l'on pioche dans l'urne 2. Soit X_1 le rang d'apparition de la première boule noire et X_2 le rang d'apparition de la seconde boule noire. On note B_i l'évènement « avoir pioché une boule blanche lors du tirage i. »

2. Quel est l'univers image de X_1 ? de X_2 ?
3. (a) Préciser $(X_1 = 3)$ en fonction des $(B_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(X_1 = 3)$.
4. Soit $k \in X_1(\Omega)$.
   (a) On suppose toutes les boules discernables. Justifier que le nombre de façons d'obtenir la première boule noire au rang k est donné par
   $$2A_{n-2}^{k-1}A_{n-k}^{n-k}$$
   On posera par convention $A_{n-2}^{-1} = 1$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$.
   (c) On suppose les boules de même couleur indiscernables. Déterminer le nombre de façons d'obtenir la première boule noire au rang k.
   (d) Retrouver le résultat de la question 4.b.
5. (a) Justifier que X_2 et $n+1-X_1$ ont la même loi.
   (b) En déduire la loi de X_2.
   (c) Est-il vrai que $X_2 = n+1-X_1$?
6. (a) Calculer $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3))$.
   (b) On suppose $n \neq 4$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   (c) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_2 = 3)$.

Partie 2 : Trouver l'urne, une compétence utile pour voter

On choisit maintenant sans regarder, au hasard et de façon équiprobable l'une des trois urnes. On note U son numéro. On pioche alors successivement, sans remise, de façon indépendante, dans l'urne choisie. On note X le rang d'apparition de la première boule noire et on pose $X = 0$ si l'on a obtenu que des boules blanches dans l'urne.

7. Calculer $\mathbb{P}\left(U = 2 \mid X = 1\right)$.
8. Déterminer la loi de X.

On choisit toujours une des trois urnes au hasard et on pioche dedans (successivement, sans remise, de façon indépendante) jusqu'à être certain de savoir quelle est l'urne initialement choisie dans laquelle on pioche. On note Z le nombre tirages qu'il nous a fallu.

9. Pour quelle valeur de U peut-on avoir $Z < n$?
10. **Sachant $\mathbf{U = 2}$**, justifier que Z a la même loi qu'une autre variable aléatoire précédemment définie.
11. En déduire la loi de Z.

Problème II - Intégration

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$h(x) = \int_1^{2x^2} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Une fonction h-ment intéressante.

1. (a) Démontrer proprement que h est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
   (b) Déterminer la parité de h.
   (c) Préciser le signe de h sur $\mathbb{R}^*$ et ses valeurs d'annulation.
2. (a) Justifier que h est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x)$.
   (b) En déduire le tableau de variation de h sur $\mathbb{R}^*$. *On ne précisera pas les limites aux bords.*
3. (a) A l'aide d'un développement limité, déterminer au voisinage de 0 la position relative de la courbe de arctan par rapport à sa tangente.
   (b) Montrer que la comparaison obtenue en 0^+ est valable sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.
   (c) En déduire que h est minorée par $-\frac{1}{2}$ sur $\left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
   (d) En déduire un minorant de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$, que l'on ne cherchera pas à déterminer, pour lequel en posant $h(0) = \alpha$ il est possible de prolonger h par continuité en 0. On note encore h ce prolongement.
5. (a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h'(x)$.
   (b) En déduire que h est dérivable à droite en 0 puis préciser l'équation de sa demi-tangente à droite ainsi que son développement limité à l'ordre 1 en 0^+ de h.
   (c) La fonction h est-elle dérivable en 0 ?

Partie 2 : Un étudiant qui s'est intégré passe en deuxième année

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$h(x) = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{2u} \, \mathrm{d}u.$$

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{\pi}{2} \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{1}{2u} \, \mathrm{d}u - h(x) = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan\left(\frac{1}{u}\right)}{2u} \, \mathrm{d}u.$$

8. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\frac{\pi}{4} \ln\left(\sqrt{2}x\right) - h(x) = -h\left(\frac{1}{2x}\right).$$

9. En déduire un développement asymptotique de h à l'ordre $\frac{1}{x}$ en $+\infty$ que l'on exprimera en fonction de α notamment.

Partie 3 : En parlant de deuxième année : une petite série entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n(x) = \frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

10. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n(1)$.

11. Soit $x \in [0;1]$. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$.

12. Soit $x > 1$. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$.

Partie 4 : Un tas d'or est caché dans la grange

On rappelle que l'on a prolongé h en 0 par une valeur notée $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ et que l'on a montré à la question 6. que
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{u} \, \mathrm{d}u = \alpha.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in \mathbb{R}$, $\left|\arctan^{(n)}(u)\right| \leqslant (n-1)!$.
On fixe $n \in \mathbb{N}$.

13. Montrer que pour tout $u \in [0;1]$,
$$\left|\arctan(u) - \sum_{k=0}^{n} a_k u^{2k+1}\right| \leqslant \frac{u^{2n+2}}{2n+2},$$
où les a_k sont des coefficients que l'on précisera sans démonstration.

14. En déduire que pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,
$$S_n\left(\sqrt{2}x\right) - S_n(1) - \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2} - 1}{(2n+2)^2} \geqslant 2h(x) \geqslant S_n\left(\sqrt{2}x\right) - S_n(1) + \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2} - 1}{(2n+2)^2}.$$

15. En déduire un encadrement de α en fonction de n et de $S_n(1)$.

16. Ecrire alors α comme la somme totale d'une série convergente.