Correction du Devoir Maison 10
Probabilités et intégration

Du mardi 12 mai

Problème I - Variables aléatoires

Soit $n \geqslant 4$. On possède trois urnes, l'urne 0 contient n boules blanches, l'urne 1 contient 1 boule noire et $n-1$ boules blanches et l'urne 2 contient 2 boules noires et $n-2$ boules blanches. On choisit une urne et on pioche alors successivement, sans remise, et de façon indépendante n fois dans la **même** urne. On note $(\Omega, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de ce problème.

1. Les tirages indépendants successifs et sans remise des n boules correspondent en fait de ranger toutes les boules et ce de façon uniforme. La boule noire peut alors être placé en première position ou deuxième position ou troisième position ... ou dernière position de façon équiprobable. Conclusion,

$$\boxed{X_0 \sim \mathscr{U}\left(\llbracket 1; n \rrbracket\right)}.$$

Partie 1 : On ne dit pas la boîte rit jaune aux toilettes mais l'urne rit noir

On suppose dans cette partie que l'on pioche dans l'urne 2. Soit X_1 le rang d'apparition de la première boule noire et X_2 le rang d'apparition de la seconde boule noire. On note B_i l'évènement « avoir pioché une boule blanche lors du tirage i. »

2. La première boule noire peut apparaitre au premier tirage, au deuxième tirage également etc. Dans le pire des cas, on ne pioche au début que des boules blanches mais on ne possède que $n-2$ boules blanches et les tirages sont sans remise. Donc dans ce cas, au tirage $n-1$ on tire une boule noire. Ainsi,

$$\boxed{X_1(\Omega) = \llbracket 1; n-1 \rrbracket.}$$

La seconde boule noire ne peut pas apparaitre au premier rang, mais peut apparaitre dès le deuxième tirage, troisième, ... voire même le dernier tirage (lorsque $X_1 = n-1$). Ainsi,

$$\boxed{X_2(\Omega) = \llbracket 2; n \rrbracket.}$$

3. (a) Pour obtenir la première boule noire au troisième tirage, il faut avoir obtenu une boule blanche puis une boule blanche puis une boule noire. Donc

$$\boxed{(X_1 = 3) = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}.}$$

(b) Par la formule des probabilités composées, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 3) = \mathbb{P}\left(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{B_3} \mid B_1 \cap B_2\right) \mathbb{P}(B_2 \mid B_1) \mathbb{P}(B_1).$$

Or on pioche de façon uniforme dans l'urne et on a $n-2$ boules blanches, donc $\mathbb{P}(B_1) = \frac{n-2}{n}$. Puis si l'on a pioché une boule blanche, il reste $n-3$ boules blanches parmi les $n-1$ boules restantes, donc $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) = \frac{n-3}{n-1}$. Enfin, si l'on a pioché 2 boules blanches, il reste toujours 2 boules noires parmi les $n-2$ boules restantes. Donc $\mathbb{P}\left(\overline{B_3} \mid B_1 \cap B_2\right) = \frac{2}{n-2}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1 = 3) = \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{2}{n-2} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X_1=3\right)=\frac{2\left(n-3\right)}{n\left(n-1\right)}.}$$

Notamment, contrairement à la question 1, on note que le rang d'apparition de la première boule noire n'est pas uniforme.

4. Soit $k \in X_1\left(\Omega\right)$.

(a) On suppose toutes les boules discernables. Pour piocher la boule noire au rang k, il faut commencer par piocher successivement et avec remise $k-1$ boules blanches parmi les $n-2$ boules blanches disponibles :

$$A_{n-2}^{k-1} \text{ façons.}$$

Puis l'on doit choisir une boule noire au tirage k : 2 choix. Enfin il nous reste $n-k$ boules (dont une noire et $n-k-1$ blanches mais peu importe puisque toutes les boules sont discernables) que l'on doit ranger (cela correspond à une permutations de ces boules) :

$$A_{n-k}^{n-k} \text{ choix.}$$

Au total on a

$$\boxed{2A_{n-2}^{k-1}A_{n-k}^{n-k} \text{ façons d'obtenir une boule noire au tirage } k.}$$

(b) Ranger toutes les boules consiste à effectuer une permutation de n éléments, on a donc $n!$ façons. Le choix parmi tous les rangements étant uniforme, on en déduit que

$$\mathbb{P}\left(X_1=k\right)=\frac{2A_{n-2}^{k-1}A_{n-k}^{n-k}}{n!}=\frac{2\frac{(n-2)!}{(n-2-k+1)!}(n-k)!}{n!}=2\frac{(n-2)!}{n!}\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}=\frac{2\left(n-k\right)}{n(n-1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X_1=k\right)=\frac{2\left(n-k\right)}{n(n-1)}.}$$

(c) On suppose les boules de même couleur indiscernables. Pour ranger $k-1$ boules blanches dans les $k-1$ premières positions, on a une seule façon de procéder. Puis l'on tire une boule noire, encore une fois, une seule façon possible. Enfin, on doit ranger 1 boule noire et $n-k-1$ boules blanches dans les $n-k$ dernières positions. Il suffit de choisir la place de la boule noire : $n-k$ choix et l'on range alors les dernières boules blanches dans les dernières places libres. Au total,

$$\boxed{n-k \text{ façons d'obtenir la première boule noire au tirage } k.}$$

(d) Il nous faut calculer le nombre total de façons que l'on a de ranger nos deux boules noires et nos $n-2$ boules blanches. Il suffit de choisir les places des boules noires : $\binom{n}{2}$ choix. Puis l'on place les boules blanches dans les places restantes. Donc

$$\binom{n}{2} \text{ façons de ranger toutes les boules.}$$

Ainsi, le choix parmi tous les rangements étant uniforme, on obtient,

$$\mathbb{P}\left(X_1=k\right)=\frac{n-k}{\binom{n}{2}}=\frac{2!(n-2)!(n-k)}{n!}=\frac{2\left(n-k\right)}{n\left(n-1\right)}.$$

On retrouve bien le résultat de la question 4.b :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X_1=k\right)=\frac{2\left(n-k\right)}{n\left(n-1\right)}.}$$

5. (a) X_2 est le rang d'apparition de la dernière boule noire donc si l'on regarde les tirages de n à 1 il correspond à la première fois que l'on note une boule noire en comptant les rangs de façon descendante. Donc obtenir la seconde boule au dernier tirage a même probabilité que d'avoir la première boule au premier tirage. Obtenir la seconde boule à l'avant-dernier tirage a même probabilité que d'avoir la première boule au deuxième tirage etc. Conclusion,

$$\boxed{X_2 \text{ et } n+1-X_1 \text{ ont la même loi.}}$$

(b) Soit $k \in [\![2; n]\!] = X_2(\Omega)$. Alors, par la question précédente,

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \mathbb{P}(n+1-X_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = n+1-k).$$

Donc, par la question 4.b,

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \frac{2(n-(n+1-k))}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{X_2(\Omega) = [\![2; n]\!], \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2; n]\!], \quad \mathbb{P}(X_2 = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.}$$

(c) On note que $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)) \neq 0$ car il est possible de piocher une boule noire au premier tirage et la seconde boule noire au deuxième tirage. Cependant si l'on avait $X_2 = n+1-X_1$, alors lorsque $X_1 = 1$, nécessairement $X_2 = n$ et donc $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)) = 0$ (car $n \geqslant 4$). Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{X_2 \neq n+1-X_1}$$

i.e. $\exists\, \omega \in \Omega$ tel que $X_2(\omega) \neq n+1-X_1(\omega)$.

6. (a) L'évènement $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)$ correspond à avoir eu une boule noire au premier tirage puis une boule blanche au deuxième et une boule noire au troisième tirage. Donc

$$(X_1 = 1) \cap (X_2 = 3) = \overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3}.$$

Donc par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \mathbb{P}\left(B_2 \mid \overline{B_1}\right) \mathbb{P}\left(\overline{B_3} \mid \overline{B_1} \cap B2\right).$$

La probabilité d'obtenir une boule noire au premier tirage est de $\mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) = 2/n$ puis il nous reste toujours $n-2$ boules blanches parmi les $n-1$ boules restantes donc $\mathbb{P}\left(B_2 \mid \overline{B_1}\right) = \frac{n-2}{n-1}$ et enfin il nous reste une boule noire parmi les $n-2$ boules restantes donc $\mathbb{P}\left(\overline{B_3} \mid \overline{B_1} \cap B2\right) = \frac{1}{n-2}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = \frac{2}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = \frac{2}{n(n-1)}.}$$

(b) On suppose $n \neq 4$. Par les questions précédentes, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 1)\, \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} \frac{2 \times 2}{n(n-1)} = \frac{8}{n^2(n-1)} = \frac{4}{n} \frac{2}{n(n-1)}.$$

Or $\frac{4}{n} \neq 1$ et donc par la question précédente,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1)\, \mathbb{P}(X_2 = 3) \neq \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)).$$

Conclusion,

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

(c) Par définition de la probabilité conditionnelle, car $\mathbb{P}(X_2 = 3) \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_2 = 3) = \frac{\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3))}{\mathbb{P}(X_2 = 3)}.$$

Par la question 6.a, on sait que $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 3)) = \frac{2}{n(n-1)}$. De plus par la question 5.b lorsque $k = 3$, on obtient, $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{2(3-1)}{n(n-1)} = \frac{4}{n(n-1)}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_2 = 3) = \frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{4}{n(n-1)}} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_2 = 3) = \frac{1}{2}.}$$

C'est logique, si l'on sait que la seconde boule noire apparait au 3*ième tirage cela signifie que sur les deux premiers tirages on a pioché la première boule noire et une boule blanche. On se ramène donc au cas de l'urne* 1 *lorsque* $n = 2$ *et donc la loi est une loi uniforme sur les deux premiers tirages.*

Partie 2 : Trouver l'urne, une compétence utile pour voter

On choisit maintenant sans regarder, au hasard et de façon équiprobable l'une des trois urnes. On note U son numéro. On pioche alors successivement, sans remise, de façon indépendante, dans l'urne choisie. On note X le rang d'apparition de la première boule noire et on pose $X = 0$ si l'on a obtenu que des boules blanches dans l'urne.

7. On note que si $U = 1$ ou $U = 2$, l'urne contient au moins une boule noire qu'il est possible d'obtenir dès le premier tirage. Donc $\mathbb{P}(X = 1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(U = 2 \mid X = 1)$ est bien définie. Par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(U = 2 \mid X = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \mid U = 2)\,\mathbb{P}(U = 2)}{\mathbb{P}(X = 1)}.$$

On note que puisque le choix de l'urne est équiprobable, $U \sim \mathscr{U}(\llbracket 0; 2 \rrbracket)$. Donc $\mathbb{P}(U = 2) = \frac{1}{3}$. De plus, si $U = 2$, alors $X = X_1$. Donc par la question 4.b ou 4.d on a

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid U = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}.$$

Enfin, $(U = i)_{i \in \llbracket 0;2 \rrbracket}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \mid U = 0)\,\mathbb{P}(U = 0) &+ \mathbb{P}(X = 1 \mid U = 1)\,\mathbb{P}(U = 1) \\ &+ \mathbb{P}(X = 1 \mid U = 2)\,\mathbb{P}(U = 2).\end{aligned}$$

Si $U = 0$, l'urne ne contenant aucune boule noire, $\mathbb{P}(X = 1 \mid U = 0) = 0$. Si $U = 1$, l'urne contient une boule noire et n boules au total donc $\mathbb{P}(X = 1 \mid U = 1) = \frac{1}{n}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0 + \frac{1}{n} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{n} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{n}.$$

D'où,

$$\mathbb{P}(U = 2 \mid X = 1) = \frac{\frac{2}{n} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(U = 2 \mid X = 1) = \frac{2}{3}.}$$

8. On note que soit on n'a jamais obtenu de première boule noire et $X=0$ soit on obtient une première boule noire au rang 1 ou 2, ... ou n (possible dans l'urne 1). Donc $X(\Omega)=[\![0;n]\!]$. Soit $k\in[\![0;n]\!]$. Puisque $(U=i)_{i\in[\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X=k\mid U=0)\,\mathbb{P}(U=0)+\mathbb{P}(X=k\mid U=1)\,\mathbb{P}(U=1)\\+\mathbb{P}(X=k\mid U=2)\,\mathbb{P}(U=2)\,.\end{aligned}$$

Premier cas, si $k=0$, alors $\mathbb{P}(X=k\mid U=1)=\mathbb{P}(X=k\mid U=2)=0$. Donc

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X=k\mid U=0)\,\mathbb{P}(U=0)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

car $U\sim\mathscr{U}([\![0;2]\!])$.

Deuxième cas, si $k\in[\![1;n-1]\!]$, alors, $\mathbb{P}(X=k\mid U=0)=0$. Si $(U=1)$ est réalisé, l'urne ne possède qu'une seule boule noire. Alors $X=X_0$. Donc

$$\mathbb{P}(X=k\mid U=1)=\mathbb{P}(X_0=k)=\frac{1}{n}.$$

Si $(U=2)$ est réalisé, alors $X=X_1$. Donc par la question 4.b ou 4.d

$$\mathbb{P}(X=k\mid U=1)=\mathbb{P}(X_1=k)=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

Dès lors,

$$\mathbb{P}(X=k)=0+\frac{1}{n}\times\frac{1}{3}+\frac{2(n-k)}{n(n-1)}\times\frac{1}{3}=\frac{n-1+2n-2k}{3n(n-1)}=\frac{3n-2k-1}{3n(n-1)}.$$

Troisième cas, si $k=n$, alors $\mathbb{P}(X=k\mid U=0)=\mathbb{P}(X=k\mid U=2)=0$ et $\mathbb{P}(X=k\mid U=1)=\mathbb{P}(X_0=1)=\frac{1}{n}$. Donc

$$\mathbb{P}(X=k)=0+\frac{1}{n}\times\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3n}.$$

On observe alors que la formule du deuxième cas reste vraie. Conclusion,

$$X(\Omega)=[\![0;n]\!],\qquad\forall k\in[\![0;n]\!],\quad\mathbb{P}(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{3}&\text{si } k=0\\\frac{3n-2k-1}{3n(n-1)}&\text{si } k\in[\![1;n]\!].\end{cases}$$

Vérification :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)&=\frac{1}{3}+\sum_{k=0}^{n}\frac{3n-2k-1}{3n(n-1)}\\&=\frac{1}{3}+n\times\frac{3n-1}{3n(n-1)}-\frac{2}{3n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{1}{3}+\frac{3n-1}{3(n-1)}-\frac{2}{3n(n-1)}\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{1}{3}+\frac{3n-1}{3(n-1)}-\frac{n+1}{3(n-1)}\\&=\frac{n-1+3n-1-n-1}{3(n-1)}\\&=1\ \mathit{OK!!}\end{aligned}$$

On choisit toujours une des trois urnes au hasard et on pioche dedans (successivement, sans remise, de façon indépendante) jusqu'à être certain de savoir quelle est l'urne initialement choisie dans laquelle on pioche. On note Z le nombre tirages qu'il nous a fallu.

9. Si $U=2$, on pioche dans l'urne 2. Dans ce cas, lorsque l'on aura pioché les deux boules noires, on sera certains d'être dans l'urne 2 mais pas avant car sans boule noire on peut encore être dans l'urne 0 ou 1 et avec une seule boule noire on peut encore être dans l'urne 1. Donc quand $U=2$ on peut avoir $Z=2,\ 3,\ 4,\ \dots,\ n$. Si $U=1$ ou $U=0$ alors on ne saura pas avant le dernier tirage si l'urne contient une boule noire ou aucune. Ainsi,

$$\boxed{(Z<n) \quad \Rightarrow \quad (U=2)\,.}$$

10. Si $U=2$, alors on saura réellement que l'on est dans l'urne 2 à l'apparition de la seconde boule noire (avant on hésitera toujours avec l'urne 1). Ainsi $\boxed{\text{sachant } U=2, \text{ on a } Z \text{ a la même loi que } X_2}$.

11. Soit $k\in [\![2;n-1]\!]$. On a vu à la question 9. que $(Z=k)\subset(Z<n)\subset(U=2)$. Donc $(Z=k)=(Z=k)\cap(U=2)$. Or $\mathbb{P}\left(U=2\right)=\frac{1}{3}\neq 0$ car le choix de l'urne est uniforme : $U\sim\mathscr{U}\left([\![0;2]\!]\right)$. Donc

$$\mathbb{P}\left(Z=k\right)=\mathbb{P}\left((Z=k)\cap(U=2)\right)=\mathbb{P}\left(Z=k\mid U=2\right)\mathbb{P}\left(U=2\right)=\frac{1}{3}\mathbb{P}\left(Z=k\mid U=2\right)$$

Par la question précédente, on obtient que

$$\mathbb{P}\left(Z=k\right)=\frac{1}{3}\mathbb{P}\left(X_2=k\right).$$

Donc par la question 5.b,

$$\mathbb{P}\left(Z=k\right)=\frac{2\left(k-1\right)}{3n\left(n-1\right)}.$$

Si $k=n$, deux méthodes. *Méthode 1.* Les évènements $\left((U=i)\right)_{i\in[\![0;2]\!]}$ forment un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}\left(Z=n\right)=\mathbb{P}\left((Z=n)\cap(U=0)\right)+\mathbb{P}\left((Z=n)\cap(U=1)\right)+\mathbb{P}\left((Z=n)\cap(U=2)\right).$$

Or si on choisit l'urne 0, il faudra faire n tirages avant d'être sûr qu'elle ne contient aucune boule noire. Si on choisit l'urne 1, il faudra également faire n tirage pour être sûr d'avoir une boule noire et une seule boule noire. Donc $(U=0)\subset(Z=n)$, $(U=1)\subset(Z=n)$. Donc

$$(Z=n)\cap(U=0)=(U=0) \qquad \text{et} \qquad (Z=n)\cap(U=1)=(U=1)\,.$$

Ainsi, et avec les mêmes arguments que précédemment pour calculer $\mathbb{P}\left((Z=n)\cap(U=2)\right)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Z=n\right)&=\mathbb{P}\left(U=0\right)+\mathbb{P}\left(U=1\right)+\mathbb{P}\left(Z=n\mid U=2\right)\mathbb{P}\left(U=2\right)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\mathbb{P}\left(X_2=n\right)\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2\left(n-1\right)}{n\left(n-1\right)}\\&=\frac{2n+2}{3n}\\&=\frac{2\left(n+1\right)}{3n}.\end{aligned}$$

Méthode 2. La famille $\left((Z=k)\right)_{k\in[\![2;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc

$$1=\sum_{k=2}^{n}\mathbb{P}\left(Z=k\right)=\sum_{k=2}^{n-1}\mathbb{P}\left(Z=k\right)+\mathbb{P}\left(Z=n\right).$$

Donc par ce qui précède,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=n) &= 1-\sum_{k=2}^{n-1}\mathbb{P}(Z=k)\\ &= 1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\frac{2(k-1)}{n(n-1)}\\ &= 1-\frac{2}{3n(n-1)}\left(\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)\right)\\ &= 1-\frac{2}{3n(n-1)}\frac{(n-1)(n-2)}{2}\\ &= \frac{3n-(n-2)}{3n}\\ &= \frac{2(n+1)}{3n}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k\in[\![2;n-1]\!],\quad \mathbb{P}(Z=k)=\frac{2(k-1)}{3n(n-1)}\qquad \text{et}\qquad \mathbb{P}(Z=n)=\frac{2(n+1)}{3n}.}$$

Problème II - Intégration

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on pose

$$h(x)=\int_1^{2x^2}\frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Une fonction h-ment intéressante.

1. (a) Pour tout $t>0$, on pose

$$f(t)=\frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}.$$

La fonction f est définie et même continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Alors $2x^2>0$. Donc $\left[1;2x^2\right]$ (ou $\left[2x^2;1\right]$) est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc

$$h(x)=\int_1^{2x^2}\frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t=\int_1^{2x^2}f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe.}$$

Ceci étant vrai pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que

$$\boxed{h \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}^*.}$$

(b) On a

- $\mathbb{R}^*$ est centré en 0.
- Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Alors

$$h(-x)=\int_1^{2(-x)^2}\frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t=\int_1^{2x^2}\frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t=h(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{h \text{ est paire.}}$$

(c) Pour tout $t > 0$, on a $f(t) = \frac{\arctan(\sqrt{t})}{4t} \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale, si $2x^2 \geqslant 1$, on a

$$h(x) = \int_1^{2x^2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Or $2x^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow x^2 \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$. Ainsi,

$$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[, \qquad h(x) \geqslant 0.$$

Soit maintenant $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right[\cup \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Alors $0 < 2x^2 \leqslant 1$. Et puisque pour tout $t \in]0;1]$, $f(t) \geqslant 0$, on en déduit par croissance de l'intégrale que

$$\int_{2x^2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Donc

$$h(x) = \int_1^{2x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{2x^2}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Cherchons maintenant les valeurs d'annulation de h. Si $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou si $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a $2x^2 = 1$ et donc

$$h(x) = \int_1^{2x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrons que ce sont les seules valeurs d'annulation. Soit $x \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Supposons que

$$\int_1^{2x^2} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On sait que f est positive sur $\left[1; 2x^2\right]$ (ou $\left[2x^2; 1\right]$) et continue. Donc si son intégrale est nulle par la propriété de séparation de l'intégrale car $1 \neq 2x^2$, on en déduit que

$$\forall t \in \left[1; 2x^2\right] \text{ ou } \left[2x^2; 1\right], \qquad f(t) = 0.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) > 0$, contradiction. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $h(x) \neq 0$. Conclusion,

$$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[, \qquad h(x) > 0$$
$$\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[, \qquad h(x) < 0$$
$$h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Ce que l'on peut résumer par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

2. (a) On a déjà vu que $f : t \mapsto \frac{\arctan(\sqrt{t})}{4t}$ est définie et même continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, F est bien définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = f(x).$$

Or f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et quotient de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas (la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 mais 0 a déjà été exclu). On en déduit donc que F' est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$h(x) = F\left(2x^2\right),$$

et $x \mapsto 2x^2$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Conclusion, h est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$. De plus par dérivation d'une composée, on a

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad h'(x) &= \left(2x^2\right)' F'\left(2x^2\right) \\
&= 4x f\left(2x^2\right) \\
&= 4x \frac{\arctan\left(\sqrt{2x^2}\right)}{8x^2} \\
&= \frac{\arctan\left(\sqrt{2}x\right)}{2x} \qquad\qquad \text{car } x > 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{h \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^* \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad h'(x) = \frac{\arctan\left(\sqrt{2}x\right)}{2x}.}$$

(b) On a pour tout $x > 0$, $h'(x) = \frac{\arctan\left(\sqrt{2}x\right)}{2x} > 0$. Donc la fonction h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ puis par parité, on en déduit que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
h		↘	0	↘	‖	↗	0	↗	

3. (a) On sait que

$$\arctan(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

et $y = x$ est la tangente de la fonction arctangente en 0. Donc

$$\arctan(x) - x \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Donc $\arctan(x) - x$ est négatif en 0^+ et positif en 0^-. Autrement dit il existe $\varepsilon > 0$ tel que la courbe représentative de la fonction arctangente est

$$\boxed{\text{au-dessus de sa tangente sur } [-\varepsilon; 0] \text{ et en dessous de sa tangente sur } [0; \varepsilon].}$$

(b) Montrons que pour tout $x > 0$, on a $\arctan(x) \leqslant x$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = x - \arctan(x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geqslant 0.$$

Donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $g(0) = 0$. Donc par croissance, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \geqslant g(0) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \arctan(x) \leqslant x.}$$

(c) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\sqrt{t} \in \mathbb{R}_+^*$ et donc par la question précédente,

$$\arctan\left(\sqrt{t}\right) \leqslant \sqrt{t}.$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t} \leqslant \frac{\sqrt{t}}{4t} = \frac{1}{4\sqrt{t}}.$$

Soit $x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Alors $2x^2 \leqslant 1$. Donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_{2x^2}^{1} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{2x^2}^{1} \frac{1}{4\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sqrt{t}}{2}\right]_{t=2x^2}^{t=1} = \frac{1-\sqrt{2}\,|x|}{2} = \frac{1-\sqrt{2}x}{2} \qquad \text{car } x > 0$$

Or $-\frac{\sqrt{2}x}{2} < 0$. Donc

$$\int_{2x^2}^{1} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$h(x) = \int_{1}^{2x^2} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t = -\int_{2x^2}^{1} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, on en déduit que

$$\boxed{h \text{ est minorée par } -\frac{1}{2} \text{ sur } \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right].}$$

(d) On a vu que h est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc pour tout $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$h(x) \geqslant h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Or par la question précédente, on a en particulier $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geqslant -\frac{1}{2}$. Donc

$$\forall x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad h(x) \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Cette inégalité étant aussi vraie pour tout $x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ d'après la question précédente, on en déduit bien que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) \geqslant -\frac{1}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est minorée par } -\frac{1}{2} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

4. On a vu que la fonction h est croissante sur $]0; +\infty[$ et minorée par $-\frac{1}{2}$ sur cet intervalle. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$

Notons $\alpha = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x)$ cette limite. Puisque pour tout $x > 0$, $h(x) \geqslant -\frac{1}{2}$, par passage à la limite, on en déduit que $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$. De plus pour tout $x \in \left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, on a $h(x) \leqslant 0$ par la question 1.c. Donc par passage à la limite, on a aussi $\alpha \leqslant 0$. Etendons la définition de h en posant $h(0)=\alpha$. On a alors par définition de α,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = h(0).$$

De plus par parité pour tout $x<0$, $h(x)=h(-x)$. Donc par le changement de variable $u=-x$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} h(-u) = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} h(u) = h(0).$$

Donc la limite à droite et à gauche coïncident et valent $h(0)$. Donc on peut bien étendre h en une $\boxed{\text{fonction continue en } 0 \text{ avec } h(0)=\alpha\in\left[-\frac{1}{2};0\right].}$

5. (a) D'après la question 2.a, on a pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $h'(x)=\frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{2x}$. Or

$$\frac{\arctan\left(\sqrt{2}x\right)}{2x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \frac{\sqrt{2}x}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

(b) Par ce qui précède, la fonction h est

- continue sur $\mathbb{R}_+$,
- dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,
- admet une limite finie à droite en 0.

Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ on en déduit que la restriction de h sur $\mathbb{R}_+$ est $\mathscr{C}^1$ et notamment que

$$\boxed{\text{la dérivée à droite en 0 de } h \text{ existe et vaut } \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

De plus l'équation de sa demi-tangente à droite est donnée pour tout $x\geqslant 0$ par

$$\boxed{y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+h(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\alpha.}$$

On obtient également le développement limité suivant :

$$\boxed{h(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}x+o\left(x\right).}$$

(c) Par parité de la fonction h, on en déduit également que h est dérivable à gauche mais par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, sa demi-tangente à gauche a pour équation pour tout $x\leqslant 0$

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\alpha.$$

Autrement dit h est aussi dérivable à gauche et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}.$$

Par conséquent le taux d'accroissement n'admet aucune limite globale et

$$\boxed{h \text{ n'est pas dérivable en 0 mais présente un point anguleux.}}$$

Partie 2 : Un étudiant qui s'est intégré passe en deuxième année

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $u = \sqrt{t}$, alors $t = u^2$. La fonction $u \mapsto u^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$ et donc
$$h(x) = \int_1^{2x^2} \frac{\arctan\left(\sqrt{t}\right)}{4t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{2}|x|} \frac{\arctan(u)}{4u^2} 2u\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u \qquad \text{car } x > 0.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad h(x) = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u.}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, par la question précédente et linéarité de l'intégrale, on a
$$\frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u - h(x) = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\frac{\pi}{2}}{2u}\,\mathrm{d}u - \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u.$$
Or pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$ et donc $\frac{\pi}{2} - \arctan(u) = \arctan\left(\frac{1}{u}\right)$. Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u - h(x) = \int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan\left(\frac{1}{u}\right)}{2u}\,\mathrm{d}u.}$$

8. On a d'une part,
$$\frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(|u|)\right]_{u=1}^{u=\sqrt{2}x} = \frac{\pi}{4}\ln\left(\sqrt{2}x\right).$$
D'autre part, en posant $v = \frac{1}{u}$ i.e. $u = \frac{1}{v}$. La fonction $v \mapsto \frac{1}{v}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{d}u = -\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v$. Donc on a
$$\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan\left(\frac{1}{u}\right)}{2u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}x}} \frac{\arctan(v)}{\frac{2}{v}}\frac{-1}{v^2}\,\mathrm{d}v = -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}x}} \frac{\arctan(v)}{2v}\,\mathrm{d}v.$$
Or par la question 6., on a
$$h\left(\frac{1}{2x}\right) = \int_1^{\sqrt{2}\times\frac{1}{2x}} \frac{\arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}x}} \frac{\arctan(u)}{2u}\,\mathrm{d}u.$$
L'indice d'intégration étant muet, on en déduit que
$$-\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan\left(\frac{1}{u}\right)}{2u}\,\mathrm{d}u = -h\left(\frac{1}{2x}\right).$$
Donc par la question précédente, on obtient
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\pi}{4}\ln\left(\sqrt{2}x\right) - h(x) = -h\left(\frac{1}{2x}\right).}$$

9. Par la question précédente, pour tout $x > 0$,
$$h(x) = \frac{\pi}{4}\ln\left(\sqrt{2}x\right) + h\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{\pi}{4}\ln(x) + \frac{\pi\ln(2)}{8} + h\left(\frac{1}{2x}\right).$$
Or on a vu à la question 5.b que
$$h(u) \underset{\substack{u\to 0\\ u>0}}{=} \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}u + o(u).$$
Donc en posant $u = \frac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, on a
$$h(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{4}\ln(x) + \frac{\pi\ln(2)}{8} + \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{h(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{4}\ln(x) + \frac{\pi\ln(2)}{8} + \alpha + \frac{\sqrt{2}}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right).}$$

Partie 3 : En parlant de deuxième année : une petite série entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_n(1) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n(1)| = \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4n^2} > 0$. Donc d'après le théorème des équivalents des séries à termes positifs, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(1)|$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{4n^2}$ sont de même nature. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{4n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(1)| \text{ converge.}$$
Autrement $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(1)$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(1) \text{ converge.}}$$

11. Soit $x \in [0;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x^{2n+1} \leqslant 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant |u_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\right| = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \leqslant \frac{1}{(2n+1)^2} = |u_n(1)|\,.$$
Or on a vu à la question précédente que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(1)|$ converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n(x)| \text{ converge.}$$
Autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in [0;1]\,, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) \text{ converge.}}$$

12. Soit $x > 1$. Alors par croissance comparée, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} = +\infty.$$
Donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty$. Or on sait que si $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers ℓ) alors $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également (vers $|\ell|$). Donc par contraposée, puisque $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge nécessairement $(|u_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (attention pas nécessairement vers $+\infty$, ici la sous-suite des termes pairs diverge vers $+\infty$ mais la sous-suite des termes impairs diverge vers $-\infty$). Conclusion,
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x) \text{ diverge grossièrement et donc diverge.}}$$

Partie 4 : Un tas d'or est caché dans la grange

On rappelle que l'on a prolongé h en 0 par une valeur notée $\alpha \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$ et que l'on a montré à la question 6. que

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}x} \frac{\arctan(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \alpha.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathbb{R}$, $\left|\arctan^{(n)}(u)\right| \leqslant (n-1)!$.
On fixe $n \in \mathbb{N}$.

13. On pouvait donner les coefficient a_k sans démonstration. Faisons un peu mieux ici : on sait que

$$\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\,u^{2k+1}}{2k+1} + o\left(u^{2n+2}\right).$$

On sait de plus que la fonction arctan est $\mathscr{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$ donc par la formule de Taylor-Young, on a

$$\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\arctan^{(k)}(0)u^k}{(k)!} + o\left(u^{2n+2}\right).$$

Donc par unicité du développement limité, on en déduit que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\arctan^{(2k)}(0) = 0$ et

$$\frac{\arctan^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = a_k.$$

La fonction arctan est $\mathscr{C}^{2n+2}$ sur $[0;1]$. Donc par la formule de Taylor-Lagrange, on en déduit que pour tout $u \in [0;1]$,

$$\left|\arctan(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\arctan^{(2k+1)}(0)u^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leqslant \sup_{z\in[0;u]} \left|\arctan^{(2n+2)}(z)\right| \frac{(u-0)^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Or d'après l'énoncé, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\left|\arctan^{(2n+2)}(z)\right| \leqslant (2n+1)!$. Conclusion, pour tout $u \in [0;1]$,

$$\boxed{\left|\arctan(u) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\,u^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{u^{2n+2}}{2n+2}}$$

et les a_k de l'énoncé sont donnés par $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ pour tout $k \in [\![0;n]\!]$.

14. Soit $x \in \left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Par la question précédente, pour tout $u \in]0;1]$, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\,u^{2k+1}}{2k+1} - \frac{u^{2n+2}}{2n+2} \leqslant \arctan(u) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\,u^{2k+1}}{2k+1} + \frac{u^{2n+2}}{2n+2} \\ \Rightarrow\quad &\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\,u^{2k}}{2k+1} - \frac{u^{2n+1}}{2n+2} \leqslant \frac{\arctan(u)}{u} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\,u^{2k}}{2k+1} + \frac{u^{2n+1}}{2n+2} \end{aligned}$$

Puisque $x \in \left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, on a $\sqrt{2}x \in [0;1]$ donc les inégalités précédentes sont vraies sur $\left[\sqrt{2}x;1\right]$. Par croissance de l'intégrale, car $\sqrt{2}x \leqslant 1$,

$$\int_{\sqrt{2}x}^{1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\,u^{2k}}{2k+1} - \frac{u^{2n+1}}{2n+2}\right)\mathrm{d}u \leqslant \int_{\sqrt{2}x}^{1} \frac{\arctan(u)}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{\sqrt{2}x}^{1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\,u^{2k}}{2k+1} + \frac{u^{2n+1}}{2n+2}\right)\mathrm{d}u.$$

Calculons :

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}x}^{1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}u^{2k}}{2k+1}+\frac{u^{2n+1}}{2n+2}\right)\mathrm{d}u &= \sum_{k=0}^{n}\int_{\sqrt{2}x}^{1}\frac{(-1)^{k+1}u^{2k}}{2k+1}\mathrm{d}u+\int_{\sqrt{2}x}^{1}\frac{u^{2n+1}}{2n+2}\mathrm{d}u\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^{k+1}u^{2k+1}}{(2k+1)^2}\right]_{u=\sqrt{2}x}^{u=1}\mathrm{d}u+\left[\frac{u^{2n+2}}{(2n+2)^2}\right]_{u=\sqrt{2}x}^{u=1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}\left(\sqrt{2}x\right)^{2k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{1-\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2}}{(2n+2)^2}\\ &= S_n(1)-S_n\left(\sqrt{2}x\right)-\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2}-1}{(2n+2)^2}.\end{aligned}$$

De même,

$$\int_{\sqrt{2}x}^{1}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}u^{2k}}{2k+1}-\frac{u^{2n+1}}{2n+2}\right)\mathrm{d}u=S_n(1)-S_n\left(\sqrt{2}x\right)+\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2}-1}{(2n+2)^2}.$$

Ainsi,

$$S_n(1)-S_n\left(\sqrt{2}x\right)+\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2}-1}{(2n+2)^2}\leqslant\int_{\sqrt{2}x}^{1}\frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u\leqslant S_n(1)-S_n\left(\sqrt{2}x\right)-\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2}-1}{(2n+2)^2}.$$

Or par la question 6., on a $2h(x)=2\times\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}x}\frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u=-\int_{\sqrt{2}x}^{1}\frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u$. Donc en multipliant par -1 les inégalités précédentes, on en déduit que pour tout $x\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,

$$\boxed{S_n\left(\sqrt{2}x\right)-S_n(1)-\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2}-1}{(2n+2)^2}\geqslant 2h(x)\geqslant S_n\left(\sqrt{2}x\right)-S_n(1)+\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2}-1}{(2n+2)^2}.}$$

15. Puisque n est fixé, la fonction $S_n : u\mapsto\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}u^{2k+1}}{(2k+1)^2}$ est une fonction polynomiale et donc continue sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{x\to 0}S_n\left(\sqrt{2}x\right)=\lim_{u\to 0}S_n(u)=0 \qquad \text{car il n'y a pas de terme constant.}$$

De plus $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{2}x\right)^{2n+2}=0$ et par définition de α, on a $\lim_{x\to 0}h(x)=\alpha$. Ainsi par passage à la limite quand $x\to 0$ dans le résultat de la question précédente, on a

$$\begin{aligned} & 0-S_n(1)-\frac{0-1}{(2n+2)^2}\geqslant 2\alpha\geqslant 0-S_n(1)+\frac{0-1}{(2n+2)^2}\\ \Leftrightarrow\quad & -S_n(1)+\frac{1}{(2n+2)^2}\geqslant 2\alpha\geqslant -S_n(1)-\frac{1}{(2n+2)^2}\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{-\frac{1}{2}S_n(1)+\frac{1}{(2n+2)^2}\geqslant\alpha\geqslant-\frac{1}{2}S_n(1)-\frac{1}{(2n+2)^2}.}$$

16. D'après la question 10. la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n(1)$ converge i.e. la suite des sommes partielles $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+2)^2}=0$. Donc par passage à la limite quand $n\to+\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}S_n(1)+\frac{1}{(2n+2)^2}=\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}S_n(1)-\frac{1}{(2n+2)^2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(1).$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\alpha = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\left(1\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\left(2n+1\right)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{2\left(2n+1\right)^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{2\left(2n+1\right)^2}.}$$