

Devoir Maison 11

Représentation matricielle et Variables aléatoires

A faire pour le mardi 02 juin

Problème I - Représentation matricielle

Partie 1 : Faire fi de P , c'est finalement y porter de l'intérêt

Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de E_n . On confond dans toute cette partie le polynôme P et la fonction polynomiale $\tilde{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto P(x)$.

Pour tout $P \in E$, on pose $\varphi_1(P) = \int_X^{X+1} \tilde{P}(t) dt$.

1. Soit $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On pose $P_j = \varphi_1(X^j)$. Montrer que $P_j = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j \binom{j+1}{i} X^i$.
2. Montrer que φ_1 est un endomorphisme de E_n .
3. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(P_j)$.
4. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1} = \text{mat}_{\mathcal{B}_1}(\varphi_1)$. Que vaut $a_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$?
Attention, le fait que \mathcal{B}_1 est numérotée à partir de 0 décale tous les indices...
5. (a) Justifier que A est triangulaire et que pour tout $i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, $a_{i,i} = 1$.
(b) En déduire $\text{rg}(A)$.
(c) En déduire que φ_1 est un automorphisme.
6. On suppose dans cette question que $n = 2$.
(a) Expliciter A .
(b) Déterminer φ_1^{-1} .

Partie 2 : Les parents de ch et sh ont adopté sin et ont formé un espace à eux

On pose $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et on définit $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3) \in E^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_1(x) = e^x, \quad u_2(x) = e^{-x}, \quad u_3(x) = \sin(2\pi x).$$

On pose $H = \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$ et φ_2 la fonction définie par

$$\forall u \in H, \quad \varphi_2(u) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \int_x^{x+1} u(t) dt. \end{array}$$

7. Justifier que φ_2 est bien définie sur H .
8. Montrer que φ_2 est linéaire.
9. Montrer que \mathcal{B}_2 est une base de H .
10. Calculer $\varphi_2(u_1)$, $\varphi_2(u_2)$ et $\varphi_2(u_3)$.
11. En déduire que φ_2 est un endomorphisme de H .
12. Calculer $B = \text{mat}_{\mathcal{B}_2}(\varphi_2)$.
13. On pose $u = 2e^x - e^{-x}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Préciser B^n et en déduire $\varphi_2^n(u)$.

Partie 3 : $A = PDQ^{-1}$ $A = PDQ^{-1}$ $A = PDQ^{-1}$ $A = PDQ^{-1}$ $A = PDQ^{-1}$ $A = PDQ^{-1}$

On définit $\mathcal{B}_3 = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad v_1(x) = \operatorname{ch}(x), \quad v_2(x) = \operatorname{sh}(x), \quad v_3(x) = u_3 \left(x + \frac{1}{2} \right).$$

14. Vérifier que \mathcal{B}_3 est une famille de H et déterminer $P = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}_3)$.
15. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
16. Justifier que \mathcal{B}_3 est une base de H .
17. Déterminer $C = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_3}(\varphi_2)$ par deux méthodes.

Problème II - Couples de variables aléatoires

On lance à plusieurs reprises une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0; 1[$ et face avec une probabilité $q = 1 - p \in]0; 1[$. On suppose les différents lancers identiques et indépendants. On s'intéresse aux nombres de séries de résultats identiques. Plus précisément pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de lots de résultats identiques consécutifs observés entre 1 et n (y compris les lots de longueur 1). Par exemple, en notant F le fait d'obtenir face et P le fait d'obtenir pile, dans la série $FFPFPPFFPPPP$. Alors pour un tel ω , on a $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$ puis $N_3(\omega) = 2$, $N_4(\omega) = 3$, $N_5(\omega) = N_6(\omega) = 4$, $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 5$ et enfin $N_9(\omega) = N_{10}(\omega) = N_{11}(\omega) = 6$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire retournant 1 si la pièce a donné pile et 0 sinon.

Partie 1 : Rien à voir avec du diazote

1. Déterminer la loi de $N_2 - 1$. En déduire l'espérance et la variance de N_2 .
2. (a) Exprimer $(N_2 = 1, N_3 = 2)$ uniquement avec X_1, X_2, X_3 et les symboles $=$ et \neq .
(b) En déduire $\mathbb{P}(N_2 = 1, N_3 = 2)$.
3. Déterminer la loi conjointe de (N_2, N_3) .
4. Déterminer la loi conditionnelle de N_3 sachant $N_2 = 1$.
5. Déterminer la loi marginale de N_3 .
6. Les variables N_2 et N_3 sont-elles indépendantes ?
7. Préciser l'espérance et la variance de N_3 .

Partie 2 : Apprenons à la génération Z à générer du résultat avec la génératrice

On suppose dans toute la suite que $p = q = \frac{1}{2}$ i.e. que la pièce est équilibrée. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

8. Calculer $\mathbb{P}(N_n = 1)$ et $\mathbb{P}(N_n = n)$.
9. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k, X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k, X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k - 1, X_n = 0).$$

10. En déduire que

$$\forall k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_n = k - 1).$$

11. Déterminer une relation de récurrence entre $G_{N_{n+1}}$ et G_{N_n} .

12. En déduire G_{N_n} .

13. Calculer $\mathbb{E}(N_n)$, $\mathbb{V}(N_n)$. Vérifier la cohérence avec la question ??

14. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{t^k}{2^{n-1}}$.

15. En déduire la loi de N_n .

16. Redémontrer alors la question ??

17. Admirer la méthode pour obtenir la loi de N_n et réfléchir à une interprétation du résultat de la question ??