Correction du Devoir Maison 2
Bijections, trigonométrie, complexes

Du mardi 14 octobre

Problème I - Bijections

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

$$f(x) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} \neq 0.$$

Or $\mathrm{e}^{x} > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} > 0$. Conclusion,

$$\boxed{I = \mathbb{R}.}$$

2. On note que par la question précédente, f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = -f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est impaire.}}$$

3. On commence par observer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}\frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}.$$

Or $1 - \mathrm{e}^{-2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $1 + \mathrm{e}^{-2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.}$$

On procède de même en $-\infty$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}}\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$

Or $\mathrm{e}^{2x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1.}$$

On pouvait aussi raisonner par parité. Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, *par l'imparité de* f, *on en déduit directement que* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition. De plus,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) &= \frac{\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)'\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)'}{\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}}\\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}-\left(\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}\right)}{\left(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\right)^{2}}\\
&= \frac{4}{\left(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\right)^{2}}.
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a$\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}>0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x)>0.$$

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc à l'aide de la question précédente, on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
f	-1	$\nearrow$	1

5. On a les assertions suivantes :
   - La fonction f est strictement croissante sur **l'intervalle** $I=\mathbb{R}$,
   - La fonction f est continue sur $I=\mathbb{R}$.

   Donc par le théorème de la bijection, on en déduit que $\boxed{f \text{ définit une bijection de } I \text{ dans } J=f(I)}$. On note $g=f^{-1}$. De plus,
   - $\boxed{J=\left]\lim_{x\to-\infty} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-1;1[}$, par la question 3.,
   - g est continue sur J,
   - g est strictement croissante sur J.

6. On a déjà montré que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$\forall x \in I=\mathbb{R}, \qquad f'(x)=\frac{4}{\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}} \neq 0.$$

Donc par le théorème de la dérivée, on en déduit que $\boxed{g \text{ est dérivable sur } J}$ et

$$\forall y \in J, \qquad g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}=\frac{1}{\frac{4}{\left(\mathrm{e}^{g(y)}+\mathrm{e}^{-g(y)}\right)^{2}}}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in J, \qquad g'(y)=\frac{\left(\mathrm{e}^{g(y)}+\mathrm{e}^{-g(y)}\right)^{2}}{4}.}$$

7. Soit $(X,y) \in \mathbb{R}_+^* \times J$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{X-\frac{1}{X}}{X+\frac{1}{X}} = y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{X^2-1}{X^2+1} = y \qquad \text{car } X>0 \\
&\Leftrightarrow \quad X^2-1 = y\left(X^2+1\right) \qquad \text{car } X^2+1 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad X^2(1-y) = y+1 \\
&\Leftrightarrow \quad X^2 = \frac{1+y}{1-y} \qquad \text{car } 1-y \neq 0 \text{ car } y \neq 1 \text{ car } y \in J.
\end{aligned}$$

De plus pour tout $y \in J$, $1-y>0$ et $y+1>0$ donc $\frac{1+y}{1-y} > 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{X-\frac{1}{X}}{X+\frac{1}{X}} = y \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{X^2} = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \\
&\Leftrightarrow \quad |X| = X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \qquad \text{car } X>0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{X-\frac{1}{X}}{X+\frac{1}{X}} = y \Leftrightarrow X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.}$$

8. Soit $(x,y) \in I \times J$. On a les équivalences suivantes :

$$x = g(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

Posons $X = \mathrm{e}^x$, alors $X \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$x = g(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{X-\frac{1}{X}}{X+\frac{1}{X}}.$$

Par la question précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned}
x = g(y) \quad \Leftrightarrow \quad X = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) \qquad \text{car } \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} > 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in J, \qquad g(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$$

9. **Méthode 1.** Puisque pour tout $y \in J$, $1+y>0$ et $1-y>0$, on en déduit de la question précédente que

$$\forall y \in J, \qquad g(y) = \frac{1}{2}\ln(1+y) - \frac{1}{2}\ln(1-y).$$

La fonction g est dérivable sur son domaine de définition donc sur J en tant que différence de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall y \in J, \qquad g'(y) = \frac{1}{2(1+y)} - \frac{-1}{2(1-y)} = \frac{1-y+1+y}{2(1+y)(1-y)} = \frac{2}{2(1-y^2)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in J, \qquad g'(y) = \frac{1}{1-y^2}.}$$

Méthode 2. On sait par la question 6. que

$$\forall y \in J, \qquad g'(y) = \frac{\left(e^{g(y)} + e^{-g(y)}\right)^2}{4}.$$

Or par la question précédente, pour tout $y \in J$, $g(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall y \in J, \qquad g'(y) &= \frac{\left(e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)} + e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\left(e^{\ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right)} + e^{\ln\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)}\right)^2}{4} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)^2}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1+y}{1-y} + 2\sqrt{\frac{1+y}{1-y}\frac{1-y}{1+y}} + \frac{1-y}{1+y}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(1+y)^2 + (1-y)^2}{(1-y)(1+y)} + 2\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{1+2y+y^2+1-2y+y^2+2-2y^2}{1-y^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{4}{1-y^2}.
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{\forall y \in J, \qquad g'(y) = \frac{1}{1-y^2}.}$$

Problème II - Trigonométrie

Partie 1 : L'étoile polaire vous guidera vers l'inconnue

1. On considère les nombres complexes $z_1 = 1+i$, $z_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + i\sqrt{2}\right)$ et $Z = z_1 z_2$.

   (a) On a

   $$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

   De même,

   $$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

   Par produit,

   $$Z = z_1 z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 2\,e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad Z = 2\,e^{i\frac{5\pi}{12}}.}$$

   (b) On a les égalités entre complexes suivantes :

   $$\begin{aligned}
   Z &= z_1 z_2 \\
   &= (1+i)\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + i\sqrt{2}\right)\right) \\
   &= \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.
   \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right).}$$

(c) Par les deux questions précédentes et l'unicité de l'écriture algébrique, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & Z = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) \\ \iff\ & 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad 2\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right).}$$

(d) Calculons :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right).}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & (1-\sqrt{3})\cos x - (1+\sqrt{3})\sin x = \sqrt{6} \\ \iff\ & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\cos x - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{en multipliant par } \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \iff\ & \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\cos x - \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \iff\ & \cos\left(x + \frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \iff\ & \exists k \in \mathbb{Z},\ x + \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x + \frac{7\pi}{12} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \iff\ & \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned}$$

Conclusion : en notant $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

(b) Notons $\mathscr{S}_{[0,2\pi[}$ l'ensemble des solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

On déduit de la question précédente que : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{5\pi}{12} + 2\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right\} = \left\{\frac{19\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}\right\}.}$

Partie 2 : Suivez les instructions du facteur à la lettre

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(2x) - \sin(2x) &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2x)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2x)\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \cos(2x) - \sin(2x) = \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin(3x) - \cos(3x) &= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(3x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(3x)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(3x) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(3x)\right)\\
&= \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \sin(3x) - \cos(3x) = \sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right).}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \cos(2x) + \cos(3x) = \sin(2x) + \sin(3x)\\
\iff\quad & \cos(2x) - \sin(2x) = \sin(3x) - \cos(3x)\\
\iff\quad & \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right)\\
\iff\quad & \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 3x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x + \frac{\pi}{4} = -\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right) + 2k\pi\\
\iff\quad & \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ -x = -\pi + 2k\pi\\
\iff\quad & \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - 2k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{10} + + \frac{2k\pi}{5},\ \pi + 2k\pi \ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

4. (a) En factorisant par l'angle moitié $\frac{p+q}{2}$, calculons :

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}}\left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } e^{ip} + e^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{i\frac{p+q}{2}}.}$$

(b) Sachant que $\cos p + \cos q = \mathrm{Re}(e^{ip} + e^{iq})$ et $\sin p + \sin q = \mathrm{Im}(e^{ip} + e^{iq})$, on trouve que :

$$\boxed{\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ et } \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On déduit des questions précédentes que :

$$\cos(2x) + \cos(3x) = 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin(2x) + \sin(3x) = 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& cos(2x)+\cos(3x)=\sin(2x)+\sin(3x)\\
\iff\quad & 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\\
\iff\quad & 2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0\\
\iff\quad & 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{5x}{2}\right)-\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\right)=0\\
\iff\quad & \cos\left(\frac{x}{2}\right)=0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{5x}{2}\right)-\sin\left(\frac{5x}{2}\right)=0\\
\iff\quad & \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{5x}{2}\right)=\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\\
\iff\quad & \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad \text{ou} \quad 1=\tan\left(\frac{5x}{2}\right)\\
\iff\quad & \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{5x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi\\
\iff\quad & \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\pi+2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k\in\mathbb{Z},\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{\pi}{10}++\frac{2k\pi}{5},\ \pi+2k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}.}$$

Partie 3 : Développez vos sinus pour mieux sentir le problème

5. (a) Après calculs, on trouve : $\boxed{\sin(3x)=-4\sin^3 x+3\sin x.}$

   (b) Soit $x\in\mathbb{R}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sin(3x)+1-\cos(2x)-\sin x &= -4\sin^3 x+3\sin x+1-(1-2\sin^2 x)-\sin x\\
&= -4\sin^3 x+2\sin^2 x+2\sin x\\
&= (2\sin x)(-2\sin^2 x+\sin x+1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \sin(3x)+1-\cos(2x)-\sin x=(2\sin x)(-2\sin^2 x+\sin x+1).}$$

6. Soit $X\in\mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante :

$$2X(-2X^2+X+1)=0 \quad\iff\quad 2X=0 \quad \text{ou} \quad -2X^2+X+1=0$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta=1+8=9=3^2$. Donc les racines associées sont $\frac{-1-3}{-4}=1$ et $\frac{-1+3}{-4}=-\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$2X(-2X^2+X+1)=0 \quad\iff\quad X=0 \quad \text{ou} \quad X=1 \quad \text{ou} \quad X=-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathscr{S}=\left\{-\frac{1}{2};0;1\right\}.}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \sin(3x) + 1 - \cos(2x) - \sin x = 0 \\
\iff \quad & (2\sin x)(-2\sin^2 x + \sin x + 1) = 0 \\
\iff \quad & \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = 1 \quad \text{ou} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \\
\iff \quad & \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = 1 \quad \text{ou} \quad \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
\iff \quad & \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\
& \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi
\end{aligned}$$

Conclusion : l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions dans $\mathbb{R}$ est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ \middle|\ k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

On en déduit que l'ensemble $\mathscr{S}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ des solutions dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est : $\boxed{\mathscr{S}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right\}.}$

Problème III - Complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \frac{|z|+z}{2}$.

Partie 1 : Ce qui n'est pas réel, est souvent d'une certaine complexité

1. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$f(4-2i) = \frac{|4-2i| + 4 - 2i}{2} = \frac{\sqrt{16+4} + 4 - 2i}{2} = \frac{2\sqrt{5} + 4 - 2i}{2} = 2 + \sqrt{5} - i.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(4-2i) = 2 + \sqrt{5} - i, \qquad \mathrm{Re}(f(4-2i)) = 2 + \sqrt{5}, \qquad \mathrm{Im}(f(4-2i)) = -1.}$$

2. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{\left|e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| + e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2} = \frac{1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2}.$$

En factorisant par l'angle moitié, on obtient,

$$f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}} \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Puisque $1/2 > 0$, la forme polaire de $f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$ est bien $\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$. Puis, par la formule d'Euler

$$f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}.}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) & \Leftrightarrow & f(z) \in \mathbb{R} & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{|z|+z}{2} \in \mathbb{R} & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{|z|+z}{2} = \overline{\left(\dfrac{|z|+z}{2}\right)} & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{|z|+z}{2} = \dfrac{|z|+\overline{z}}{2} & \text{car } |z| \in \mathbb{R} \\ & \Leftrightarrow & z = \overline{z} & \\ & \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R}. & \end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Supposons que $|z| \leqslant 1$, alors, par l'inégalité triangulaire,

$$|f(z)| = \left|\frac{|z|}{2} + \frac{z}{2}\right| \leqslant \left|\frac{|z|}{2}\right| + \left|\frac{z}{2}\right| = \frac{|z|}{2} + \frac{|z|}{2} \qquad \text{car } \frac{|z|}{2} \geqslant 0.$$

Donc $|f(z)| \leqslant |z|$. Or $|z| \leqslant 1$. Donc $|f(z)| \leqslant 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad (|z| \leqslant 1 \;\Rightarrow\; |f(z)| \leqslant 1)\,.}$$

5. Soit $z \in \mathbb{U}$ i.e. $|z| = 1$. Alors, $f(z) = \frac{|z|+z}{2} = \frac{1+z}{2}$. Par suite on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} f(z) \in \mathbb{U} & \Leftrightarrow & |f(z)|^2 = 1 & \\ & \Leftrightarrow & f(z)\overline{f(z)} = 1 & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1+z}{2}\dfrac{1+\overline{z}}{2} = 1 & \\ & \Leftrightarrow & 1 + \overline{z} + z + z\overline{z} = 4 & \\ & \Leftrightarrow & 2\mathrm{Re}\,(z) + |z|^2 = 3 & \\ & \Leftrightarrow & 2\mathrm{Re}\,(z) + 1 = 3 & \text{car } z \in \mathbb{U} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Re}\,(z) = 1. & \end{array}$$

Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $z = 1+ib$. Or $z \in \mathbb{U}$, donc $\sqrt{1+b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; 1+b^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; b^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; b = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{U}, \qquad (f(z) \in \mathbb{U} \;\Leftrightarrow\; z = 1)\,.}$$

Partie 2 : Des modules non lunaires mais qui permettent d'aller loin

Soit $\theta_0 \in \,]-\pi;\pi[\, \setminus \{0\}$ et $z_0 = \mathrm{e}^{i\,\theta_0}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$z_{n+1} = f(z_n) = \frac{|z_n| + z_n}{2}.$$

On note également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \mathrm{Re}\,(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{z_{n+1} - \overline{z_{n+1}}}{2i} \\ &= \frac{\frac{|z_n|+z_n}{2} - \overline{\left(\frac{|z_n|+z_n}{2}\right)}}{2i} \\ &= \frac{|z_n| + z_n - |z_n| - \overline{z_n}}{4i} \\ &= \frac{z_n - \overline{z_n}}{4i} \\ &= \frac{y_n}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_{n+1} = \frac{y_n}{2}.}$$

Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Dès lors, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_0 = \frac{\operatorname{Im}(z_0)}{2^n} = \frac{\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{i\,\theta_0}\right)}{2^n} = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_n = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n}.}$$

7. Puisque $\theta_0 \in \left]-\pi;\pi\right[\setminus \{0\}$, on en déduit que $\sin(\theta_0) \neq 0$ et donc par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n} \neq 0$. Puisque sa partie imaginaire est non nul, le complexe z_n est aussi nécessairement non nul. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n \neq 0.}$$

Par la question précédente, il est possible de donner la forme polaire de z_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = |z_n|$ et $\theta_n = \arg(z_n) \in \left]-\pi;\pi\right]$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} = \frac{|z_n| + z_n}{2} = \frac{r_n + r_n\,\mathrm{e}^{i\,\theta_n}}{2} = \frac{r_n}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{i\,\theta_n}\right).$$

Par la factorisation par l'angle moitié,

$$z_{n+1} = \frac{r_n}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\theta_n}{2}} + \mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}\right) = \frac{r_n}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}\,2\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right).$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta_n}{2}}.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque par définition $\theta_n \in \left]-\pi;\pi\right[$, on en déduit que $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, on a $\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) > 0$ et donc il fait bien partie du module de z_{n+1}. De même puisque $\frac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ il est l'argument de z_{n+1} qui est compris entre $\left]-\pi;\pi\right[$. Conclusion,

$$\boxed{r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.}$$

10. Par la question précédente, on observe que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/2$. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}.$$
Procédons maintenant par récurrence. Posons
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathscr{P}(n) : \text{« } r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right). \text{ »}$$
Initialisation. Si $n = 1$, alors,
$$\prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{\theta_0}{2^1}\right) = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right).$$
D'autre part, par la question précédente avec $n = 0$,
$$r_1 = r_0 \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \left|e^{i\,\theta_0}\right| \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right).$$
Donc on a bien $r_1 = \prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$ et $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e.
$$r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$
Alors, par la question précédente,
$$r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)\right) \times \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right).$$
De plus, on a vu que $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$ donc
$$r_{n+1} = \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)\right) \times \cos\left(\frac{\frac{\theta_0}{2^n}}{2}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)\right) \times \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}}\right) = \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. *Conclusion,* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $z_n = r_n\, e^{i\,\theta_n} = x_n + iy_n$. Donc on obtient que
$$y_n = r_n \sin(\theta_n).$$
Par la question précédente, on sait que $r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$ et on a vu que $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$. Ainsi,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad y_n = \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).}$$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la question 6. $y_n = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n}$. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\sin(\theta_0)}{2^n} = \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right).$$
Or $\theta_0 \in \left]-\pi; \pi\right[\setminus \{0\}$. Donc $\frac{\theta_0}{2^n} \in \left]-\frac{\pi}{2^n}; \frac{\pi}{2^n}\right[\setminus \{0\} \subset \left]-\pi; \pi\right[\setminus \{0\}$. Dès lors, $\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) \neq 0$. Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}.}$$

12. *Alors ça, c'est gentil !* D'après le cours, on sait directement que

$$\boxed{\lim_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} \frac{\sin(u)}{u} = 1.}$$

13. Posons $u = \frac{\theta_0}{2^n}$. Quand $n \to +\infty$, on a $u \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u \neq 0$. Donc par la question précédente,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}{\frac{\theta_0}{2^n}} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{\theta_0} \lim_{n \to +\infty} 2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} 2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \theta_0 \,.$$

Par passage à l'inverse, car $\theta_0 \neq 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(\theta_0)}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)} = \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}.$$

Donc par ce qui précède, on en conclut que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0}.}$$