

Devoir Maison 3

Calcul algébrique, fonctions usuelles

A faire pour le jeudi 13 novembre

Problème I - Calcul algébrique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} \in \mathbb{R}^{n+1}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Partie 1 : Ce n'est pas toujours mauvais de bien connaître ses ex(emples)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a^n$ et $b_n = 3$. Calculer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n .
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a^n$ et $b_n = b^n$. Calculer alors $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $a_k = \binom{n}{k}$ et $b_k = 2^k$. Calculer dans ce cas S_n .
4. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n + 1$ et $b_n = n^2$. Calculer alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n .
5. Soient $x \in \mathbb{R}^*$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = \text{ch}(nx)$.
 - (a) Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Développer $\text{ch}(kx) \text{ch}((n-k)x)$.
 - (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \frac{(n+1) \text{ch}(nx)}{2} + \frac{\text{sh}((n+1)x)}{2 \text{sh}(x)}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $a_k = \sum_{i=k}^n \frac{1}{i+1}$ et $b_k = 1$. Calculer dans ce cas S_n .

Partie 2 : Parfois on reste même en relation de façon récurrente

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

On obtient alors l'expression suivante de S_n et on pose également T_n par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k}.$$

7. Calculer successivement $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, S_0, S_1, S_2, S_3$. Quelle conjecture peut-on émettre ?
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2) a_{n+1} = 2(2n+1) a_n$.
9. A l'aide d'un changement d'indice, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{k=0}^n (k+2) a_{k+1} a_{n-k}.$$

10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 4T_n + 2S_n$.
11. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^n (n-k) a_k a_{n-k}$.
 (b) En déduire une expression de T_n en fonction de S_n .
12. Déduire des questions précédentes une relation de récurrence entre S_{n+1} , a_{n+1} et S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
13. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_{n+1}$.
14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.

Problème II - Fonctions usuelles

On considère les fonctions définies lorsque c'est possible par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right) \quad \text{et} \quad g(x) = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right).$$

On souhaite montrer l'égalité suivante :

$$\forall x \in [0; 4[, \quad g(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}. \quad (\star)$$

Partie 1 : Même si g a du pi en plus, il n'est pas vache

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f .
2. Préciser $f(0)$, $f(2)$ et $f(\sqrt{3} + 2)$.
3. Déterminer $\mathcal{D}_{f'}$ le domaine de dérivabilité de f .
4. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

5. Déterminer I le domaine de définition de g .
6. Préciser $g(0)$ et $g(2)$.
7. Résoudre l'équation $g(x) = \frac{\pi}{3}$.
8. Déterminer I' le domaine de dérivabilité de g .
9. Montrer que pour tout $x \in I'$,

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

10. Etablir $(\star)$.

Partie 2 : La trigo fait aussi trivialement le tri

On fixe $x \in [0; 4[$.

11. Soit $u \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
 - (a) Exprimer $\tan'(u)$ en fonction de $\tan(u)$.
 - (b) Exprimer $\tan'(u)$ en fonction de $\cos(u)$.
 - (c) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\arctan(t)) = \frac{1}{1+t^2}$.
12. En déduire $\cos(g(x))$.
13. Calculer $\cos(f(x) + \frac{\pi}{2})$.
14. En déduire $(\star)$.

Partie 3 : Dire que l'on finit en beauté n'est certainement pas une hyperbole

15. Résoudre l'équation $\operatorname{ch}(y) = \sqrt{2}$, d'inconnue $y \in \mathbb{R}$.
16. En déduire $A = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \operatorname{ch}^2(y) \in [0; 4[\}$.
17. A l'aide de $(\star)$, montrer que

$$\forall y \in A, \quad 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{ch}(y)}{\sqrt{2 - \operatorname{ch}^2(y)}}\right) = \arcsin(\operatorname{sh}^2(y)) + \frac{\pi}{2}.$$