

Devoir Maison 4

Equations complexes, calcul d'intégrales, équations différentielles d'ordre 1

A faire pour le mardi 02 décembre

Problème I - Equations et géométrie complexes

Soient A, B, C, I, O les points d'affixe respectivement $z_A = 1 - i$, $z_B = \sqrt{2}i$, $z_C = 1 + (\sqrt{2} - 1)i$, $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ et $Z_O = 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{\sqrt{2}i\}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\sqrt{2}i\}, \quad f(z) = \frac{z - 1 + i}{z - \sqrt{2}i}.$$

1. Préciser la forme polaire de z_A et de z_B .
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{10} - (1 + i)z^5 + 2 + 2i = 0$.
4. Justifier que A s'obtient à partir de B par une rotation de centre C dont on déterminera l'angle.
5. (a) Montrer que $f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) = \left\{ (\sqrt{2} + 1 + i)y \in \mathbb{C} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.
 (b) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points dont l'affixe est dans $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$. Vérifier que O, I et C sont des points de $\mathcal{D}$.
 (c) Montrer que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{\sqrt{2}i\}$, on a $z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$.
 (d) En déduire à quel ensemble géométrique correspond $\mathcal{D}$ par rapport à $[AB]$.
6. Montrer que $ACBO$ est un losange.
7. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $-\sqrt{2}i e^{i\theta} + 1 - i = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{3\pi}{8}\right)}$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que

$$f^{\leftarrow}(\mathbb{U}_n) = \left\{ \sqrt{2} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\frac{\pi}{8}} \mid k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \right\}.$$

Problème II - Calcul d'intégrales

On fixe dans tout ce problème $I =]0; +\infty[$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in I, \quad F_n(x) = \int_1^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt.$$

Partie 1 : Fiez-vous aux F_i , n'en faites pas fi

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que F_n est une fonction bien définie sur I .
2. Soit $x \in I$. Calculer $F_1(x)$.
3. Soit $x \in I$. Calculer $F_2(x)$.
4. Soit $x \in I$. Calculer $F_3(x)$.

5. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

6. Soit $x \in I$. Calculer $F_0(x)$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, calculer $F_n(x) + F_{n+2}(x)$. En déduire F_4 .

Partie 2 : Voici A, B, C . Jamais d'eux sans 3...

8. Justifier l'existence puis calculer

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} t \arctan(t) dt.$$

9. Justifier l'existence puis calculer

$$B = \int_0^1 \frac{e^{3t}}{1+e^{2t}} dt.$$

10. Justifier l'existence puis calculer

$$C = \int_0^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt.$$

Problème III - Equation différentielle d'ordre 1

Prérequis : On admet que la fonction exponentielle admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0, autrement dit on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow 0} \varepsilon_n(0) = 0$ et telle que

$$(\star) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon_n(x),$$

On considère l'équation (E) d'inconnue une fonction y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| y'(x) - (x+1)y(x) = x^2.$$

On définit également les équations suivantes :

$$(E^+) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x| y'(x) - (x+1)y(x) = x^2,$$

$$(E_0^+) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x| y'(x) - (x+1)y(x) = 0,$$

$$(E^-) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad |x| y'(x) - (x+1)y(x) = x^2,$$

$$(E_0^-) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad |x| y'(x) - (x+1)y(x) = 0.$$

et on note respectivement $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^+$, $\mathcal{S}_0^+$, $\mathcal{S}^-$ et $\mathcal{S}_0^-$ les solutions de (E) , (E^+) , (E_0^+) , (E^-) et (E_0^-) .

Partie 1 : Qui positive, peut le +. Et qui peut le +...

1. Résoudre (E_0^+) .

2. A l'aide de la méthode de variation de la constante, démontrer que

$$\mathcal{S}^+ = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -x + Cx e^x \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Partie 2 : ...peut le – (enfin plus ou moins).

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer l'intégrale $\int_0^x t^2 e^t dt$.
4. Résoudre (E_0^-) .
5. A l'aide des questions précédentes, appliquer la méthode de variation de la constante pour démontrer que

$$\mathcal{S}^- = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -x + 2 + \frac{C e^{-x} - 2}{x} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Partie 3 : Lorsque les connexions se font, la solution apparaît

Soit $y \in \mathcal{S}$.

6. Déterminer $y(0)$.
7. Justifier qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} -x + Ax e^x & \text{si } x > 0 \\ y(0) & \text{si } x = 0 \\ -x + 2 + \frac{B e^{-x} - 2}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

8. Soit $C \in \mathbb{R}$. Déterminer en justifiant et suivant les valeurs de C , $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{C e^{-x} - 2}{x}$.
9. En déduire que $B = 2$.
10. A l'aide de la relation (★), démontrer qu'il existe $\varepsilon_3 : \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_3(x) = 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y(x) = -\frac{x^2}{3} + x^2 \varepsilon_3(x),$$

11. Démontrer alors que y est alors bien continue sur $\mathbb{R}$, et ce quelque soit la valeur de A .
12. Déterminer la valeur de A pour que y soit bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
13. Démontrer qu'il existe $\varepsilon_1 : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = x^2 + x^2 \varepsilon_1(x).$$