Correction du Devoir Maison 5 Equations différentielle, matrices, analyse asymptotique

Du mardi 06 janvier

Problème I - Equations différentielles

L'objectif de ce problème est de déterminer l'ensemble des solutions de l'équation suivante sur $\mathbb{R}$:

$$(E) \qquad x^2y'' + 3|x|y' + 3y = 1 + 6x^3.$$

Partie 1 : Le v de la victoire

On considère l'équation suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$(E-) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad x^2y'' + 3|x|y' + 3y = 1 + 6x^3.$$

On définit également l'équation d'inconnue v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.

$$(F) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad v' + \frac{3}{x}v = \frac{1}{x^5} + \frac{6}{x^2}.$$

On note (F_0) l'équation homogène associée.

1. Par définition, l'équation (F_0) est l'équation suivante d'inconnue v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$(F_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad v' + \frac{3}{x}v = 0.$$

L'équation (F_0) est une équation linéaire du premier ordre homogène et résolue en v'. De plus la fonction $x \mapsto \frac{3}{x}$ est **continue** sur **l'intervalle** $\mathbb{R}_-^*$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_-^*$ dont l'une est donnée par $x \mapsto 3\ln(|x|)$. Or $\mathrm{e}^{-3\ln(|x|)} = \frac{1}{|x^3|} = -\frac{1}{x^3}$ Par conséquent, l'ensemble des solutions de (F_0) est donné par

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\frac{-1}{x^3} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}$$

Ou encore quitte à changer C en $-C$,

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{ v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{x^3} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^3} \end{array} \right).}$$

2. On applique la méthode de variation de la constante. Posons $v_0 : x \mapsto \frac{1}{x^3}$. Soit v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $w(x) = \frac{v(x)}{v_0(x)}$ (car v_0 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_-^*$) i.e. $v(x) = w(x)v_0(x)$. Alors la fonction w est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. De plus,

$$\begin{aligned}
& v \text{ solution de } (F) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad v'(x) + \frac{3}{x}v(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{6}{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad w'(x)v_0(x) + w(x)v_0'(x) + \frac{3}{x}w(x)v_0(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{6}{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad w'(x)v_0(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{6}{x^2} && \text{car } v_0 \in \mathscr{S}_0 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \frac{w'(x)}{x^3} = \frac{1}{x^5} + \frac{6}{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad w'(x) = \frac{1}{x^2} + 6x && \text{car } x \neq 0
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2} + 6x$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_-^*$ dont l'une est donnée par $x \mapsto -\frac{1}{x} + 3x^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
& v \text{ solution de } (F) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad w(x) = -\frac{1}{x} + 3x^2 + C \\
\Leftrightarrow \quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad v(x) = w(x)v_0(x) = \frac{w(x)}{x^3} = -\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x} + \frac{C}{x^3}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \left\{ v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x} + \frac{C}{x^3} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3. Soit y une fonction deux fois dérivable $\mathbb{R}_-^*$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $u(x) = \frac{y(x)}{x^3}$ puis $v = u'$.

(a) Puisque la fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, la fonction u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de fonctions deux fois dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc u' existe bien, $\boxed{v \text{ est bien définie}}$ et même u' est dérivable et donc $\boxed{v \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_-^*}$.

(b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $y(x) = x^3 u(x)$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y'(x) = 3x^2 u(x) + x^3 u'(x).$$

Puis,

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y''(x) = 6xu(x) + 3x^2u'(x) + 3x^2u'(x) + x^3u''(x) = x^3u''(x) + 6x^2u'(x) + 6xu(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E-) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = 1 + 6x^3 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad x^2\left(x^3u''(x) + 6x^2u'(x) + 6xu(x)\right) \\
& \qquad\qquad - 3x\left(x^3u'(x) + 3x^2u(x)\right) + 3x^3u(x) = 1 + 6x^3 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad x^5u''(x) + \left(6x^4 - 3x^4\right)u'(x) + \underbrace{\left(6x^3 - 9x^3 + 3x^3\right)}_{=0}u(x) = 1 + 6x^3 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad x^5u''(x) + 3x^4u'(x) = 1 + 6x^3 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad x^5v'(x) + 3x^4v(x) = 1 + 6x^3 \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad v'(x) + \frac{3}{x}v(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{6}{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & v \text{ solution de } (F)
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{y \text{ solution de } (E-) \qquad \Leftrightarrow \qquad v \text{ solution de } (F)}$$

(c) Avec les notations de la question précédente, et par la question 2., on a

$$\begin{aligned}
y \in \mathscr{S}_{E-} \quad & \Leftrightarrow \quad v \in \mathscr{S}_F \\
& \Leftrightarrow \quad \exists C_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad u'(x) = v(x) = -\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x} + \frac{C_1}{x^3}.
\end{aligned}$$

Pour $C_1 \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x} + \frac{C_1}{x^3}$ est continue sur **l'intervalle** $\mathbb{R}_-^*$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}_-^*$ dont l'une est donnée par $x \mapsto \frac{1}{3x^3} + 3\ln(|x|) - \frac{C_1}{2x^2}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} y \in \mathscr{S}_{E-} &\Leftrightarrow \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad u(x) = \frac{1}{3x^3} + 3\ln(|x|) - \frac{C_1}{2x^2} + C_2 \\ &\Leftrightarrow \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y(x) = x^3 u(x) = \frac{1}{3} + 3x^3\ln(|x|) - \frac{C_1}{2}x + C_2 x^3. \end{aligned}$$

Conclusion, (en posant $\tilde{C_1} = -C_1/2$)

$$\boxed{\mathscr{S}_{E-} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3} + 3x^3\ln(|x|) + C_1 x + C_2 x^3 \end{array} \middle| (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

4. Soit $y \in \mathscr{S}_{E-}$.

   (a) Par ce qui précède, il existe $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $y(x) = \frac{1}{3} + 3x^3\ln(|x|) + C_1 x + C_2 x^3$. On observe que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{3} + C_1 x + C_2 x^3}{3x^3\ln(|x|)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2} + C_2}{3\ln(|x|)} = C_2 \times \frac{1}{+\infty} = 0.$$

   Par conséquent,

$$\frac{1}{3} + 3x^3\ln(|x|) + C_1 x + C_2 x^3 \underset{x\to-\infty}{=} o\left(3x^3\ln(|x|)\right).$$

   D'où,

$$y(x) = \frac{1}{3} + 3x^3\ln(|x|) + C_1 x + C_2 x^3 \underset{x\to-\infty}{=} 3x^3\ln(|x|) + o\left(-3x^3\ln(|x|)\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} 3x^3\ln(|x|).$$

   Conclusion,

$$\boxed{y(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} 3x^3\ln(|x|).}$$

   (b) De la question précédente, on en déduit que

$$\frac{y(x)}{x} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{3x^3\ln(|x|)}{x} = 3x^2\ln(|x|).$$

   Or deux équivalents ont la même limite. Donc

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 3x^2\ln(|x|) = +\infty.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de la fonction } y \text{ admet une branche parabolique de direction verticale en } -\infty.}$$

Partie 2 : Le z, nous le signons à la pointe de l'épée

On considère l'équation suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E+) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x^2 y'' + 3|x|y' + 3y = 1 + 6x^3.$$

5. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composée, $\boxed{\text{la fonction } z \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t = \ln(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^t$ et on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = z(\ln(x))$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln(x)) \qquad \text{et} \qquad y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}z''(\ln(x)).$$

Par suite,

$$\begin{array}{lll}
 & y \text{ solution de } (E+) & \\
\Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x^2 y''(x) + 3\,|x|\,y'(x) + 3y(x) = 1 + 6x^3 \\
\Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x^2\left(-\dfrac{1}{x^2} z'\left(\ln(x)\right) + \dfrac{1}{x^2} z''\left(\ln(x)\right)\right) + 3x\left(\dfrac{1}{x} z'\left(\ln(x)\right)\right) + 3z\left(\ln\left(x\right)\right) = 1 + 6x^3 \\
\Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & -z'\left(\ln(x)\right) + z''\left(\ln(x)\right) + 3z'\left(\ln(x)\right) + 3z\left(\ln\left(x\right)\right) = 1 + 6x^3 \\
\Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & z''(t) + 2z'(t) + 3z(t) = 1 + 6\,\mathrm{e}^{3t}
\end{array}$$

Conclusion, y est solution de $(E+)$ si et seulement si z est solution de

$$(G) \qquad \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) + 2z'(t) + 3z(t) = 1 + 6\,\mathrm{e}^{3t}.}$$

6. L'équation homogène associée est

$$(G_0) \qquad \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) + 2z'(t) + 3z(t) = 0.}$$

L'équation caractéristique associée à (G) est $r^2 + 2r + 3 = 0$. Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 4 - 12 = -8$. Les racines sont donc complexes conjuguées et données par

$$r_1 = \frac{-2 + 2i\sqrt{2}}{2} = -1 + i\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = -1 - i\sqrt{2}.$$

Par conséquent l'ensemble $\mathscr{S}_{G_0}$ des solutions de l'équation homogène est

$$\mathscr{S}_{G_0} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-t}\left(A\cos\left(\sqrt{2}t\right) + B\sin\left(\sqrt{2}t\right)\right) \end{array} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Cherchons une solution de

$$(G_1) \qquad \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) + 2z'(t) + 3z(t) = 1.}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $z_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & a \end{array}$. La fonction z_1 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$z_1 \text{ est solution de } (G_1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad 0 + 3a = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent, $z_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{3} \end{array}$ est une solution de (G_1).

Cherchons une solution de

$$(G_2) \qquad \boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) + 2z'(t) + 3z(t) = 6\,\mathrm{e}^{3t}.}$$

On note que 3 n'est pas une solution de l'équation caractéristique. Par conséquent pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on cherche une solution de type $z_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\,\mathrm{e}^{3t} \end{array}$. La fonction z_2 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{lll}
z_2 \text{ est solution de } (G_2) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, \quad 9\,\lambda\,\mathrm{e}^{3t} + 2 \times 3\,\lambda\,\mathrm{e}^{3t} + 3\,\lambda\,\mathrm{e}^{3t} = 6\,\mathrm{e}^{3t} \\
 & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, \quad 18\,\lambda\,\mathrm{e}^{3t} = 6\,\mathrm{e}^{3t} \\
 & \Leftrightarrow & 18\,\lambda = 6 \qquad \text{car } \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{3t} \neq 0 \\
 & \Leftrightarrow & \lambda = \dfrac{1}{3}.
\end{array}$$

Donc $z_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3t} \end{array}$ est une solution de (G_2). D'où, par le principe de superposition, la fonction $z_p = z_1 + z_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{3} + \frac{\mathrm{e}^{3t}}{3} \end{array}$ est une solution de (G). Conclusion, l'ensemble des solutions de (G) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_G = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1+\mathrm{e}^{3t}}{6} + \mathrm{e}^{-t}\left(A\cos\left(\sqrt{2}t\right) + B\sin\left(\sqrt{2}t\right)\right) \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

7. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$. Par la question 5., puis la question précédente, on a

$$\begin{aligned} y \in \mathscr{S}_{E+} \quad & \Leftrightarrow \quad z \in (G) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad z(t) = \frac{1+\mathrm{e}^{3t}}{3} + \mathrm{e}^{-t}\left(A\cos\left(\sqrt{2}t\right) + B\sin\left(\sqrt{2}t\right)\right). \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = z\left(\ln(x)\right)$. Ainsi, $y \in \mathscr{S}_{E+}$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \frac{1+\mathrm{e}^{3\ln(x)}}{3} + \mathrm{e}^{-\ln(x)}\left(A\cos\left(\sqrt{2}\ln(x)\right) + B\sin\left(\sqrt{2}\ln(x)\right)\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \frac{1+x^3}{3} + \frac{1}{x}\left(A\cos\left(\sqrt{2}\ln(x)\right) + B\sin\left(\sqrt{2}\ln(x)\right)\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_{E+} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ t & \mapsto & \frac{1+x^3}{3} + \frac{A\cos\left(\sqrt{2}\ln(x)\right) + B\sin\left(\sqrt{2}\ln(x)\right)}{x} \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie 3 : Voilà une solution branchée

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Soit $y \in \mathscr{S}$. On pose y_+ la restriction de y sur $\mathbb{R}_+^*$ et y_- la restriction de y sur $\mathbb{R}_-^*$.

8. Puisque y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier, on en déduit que y_+ est solution de la même équation sur $\mathbb{R}_+^*$, i.e. y_+ est une solution de $(E+)$. Donc par la question précédente,

$$\boxed{\exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = y_+(x) = \frac{1+x^3}{3} + \frac{A\cos\left(\sqrt{2}\ln(x)\right) + B\sin\left(\sqrt{2}\ln(x)\right)}{x}.}$$

De même, y_- est solution de $(E-)$ donc

$$\boxed{\exists\,(C,D) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = y_-(x) = \frac{1}{3} + 3x^3\ln\left(|x|\right) + Cx + Dx^3.}$$

9. Par la question précédente, on a directement que

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} y_-(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{1}{3} + 3x^3\ln\left(|x|\right) + Cx + Dx^3 = \frac{1}{3}.$$

Or par hypothèse, la fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc notamment y est continue en 0. Donc

$$y(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} y(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} y_-(x) = \frac{1}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{y(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} y_-(x) = \frac{1}{3}.}$$

10. Pour tout $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, on admet que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{A \cos\left(\sqrt{2}\ln(x)\right) + B \sin\left(\sqrt{2}\ln(x)\right)}{x} \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad A = B = 0.$$

Or, y est continue en 0 donc

$$\frac{1}{3} = y(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} y(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} y_+(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1 + x^3}{3} + \frac{A \cos\left(\sqrt{2}\ln(x)\right) + B \sin\left(\sqrt{2}\ln(x)\right)}{x}.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{A \cos\left(\sqrt{2}\ln(x)\right) + B \sin\left(\sqrt{2}\ln(x)\right)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(y_+(x) - \frac{1 + x^3}{3}\right) = y(0) - \frac{1}{3} = 0.$$

D'où $\frac{A \cos\left(\sqrt{2}\ln(x)\right) + B \sin\left(\sqrt{2}\ln(x)\right)}{x}$ existe et nécessairement, $A = B = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y_+(x) = \frac{1 + x^3}{3}.}$$

11. Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{y_+(x) - y(0)}{x - 0} &= \frac{y_+(x) - \frac{1}{3}}{x} \qquad \text{par la question 9.} \\ &= \frac{\frac{1+x^3}{3} - \frac{1}{3}}{x} \\ &= \frac{x^2}{3}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{y_+ \text{ est dérivable à droite}}$ et

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{y_+(x) - y(0)}{x - 0} = 0.}$$

12. Pour tout $x < 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} &= \frac{y_-(x) - \frac{1}{3}}{x} \qquad \text{par la question 9.} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + 3x^3 \ln(|x|) + Cx + Dx^3 - \frac{1}{3}}{x} \\ &= 3x^2 \ln(|x|) + C + Dx^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = C.}$$

Or la fonction y est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ donc dérivable en 0. Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = y'(0).$$

Donc par ce point et la question précédente,

$$\boxed{y'(0) = 0 = C.}$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad y_-(x) = \frac{1}{3} + 3x^3 \ln(|x|) + Dx^3.}$$

13. Par les questions précédentes, nous avons vu que y est dérivable en 0 et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme composée de fonctions qui le sont). Il nous reste donc à montrer que y est deux fois dérivable en 0 i.e. que
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{y'(x)-y'(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{y'(x)-y'(0)}{x-0}.$$
Par ce qui précède, on a $y'(0)=0$. Calculons
$$\begin{aligned}
\forall x>0, \qquad & y'(x) = y_+'(x) = \left(\frac{1+x^3}{3}\right)' = x^2\\
\forall x<0, \qquad & y'(x) = y_-'(x)\\
& \qquad = \left(\frac{1}{3}+3x^3\ln(|x|)+Dx^3\right)'\\
& \qquad = 9x^2\ln(|x|)+3x^3\frac{1}{x}+3Dx^2\\
& \qquad = 9x^2\ln(|x|)+3(1+D)x^2
\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{y'(x)-y'(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$$
et
$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{y'(x)-y'(0)}{x-0} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{9x^2\ln(|x|)+3(1+D)x^2-0}{x-0}\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 9x\ln(|x|)+3(1+D)x\\
&= 0 \qquad\qquad \text{par croissance comparée.}
\end{aligned}$$
Ainsi, on a bien
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{y'(x)-y'(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{y'(x)-y'(0)}{x-0}.$$
Donc y est deux fois dérivable en 0 et $y''(0)=0$. Conclusion,
$$\boxed{y \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.}$$
Les étudiants curieux pourront s'amuser à démontrer que y n'est pas trois fois dérivable en 0...

14. Par les questions précédentes, nous avons vu que SI y est une solution de (E) ALORS,
$$\exists D\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}, \qquad y(x) = \begin{cases} y_+(x) = \frac{1+x^3}{3} & \text{si } x>0\\ \frac{1}{3} & \text{si } x=0\\ y_-(x) = \frac{1}{3}+3x^3\ln(|x|)+Dx^3 & \text{si } x<0. \end{cases}$$
Synthèse. Nous avons également vu que cette fonction était continue en 0, dérivable en 0 car $y'\left(0^+\right) = y'\left(0^-\right) = 0$ et deux fois dérivable en 0, $y''(0)=0$ et même deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Vérifions qu'elle est solution de (E). Pour tout $x>0$, $y(x)=y_+(x)$ et y_+ est une solution de $(E+)$. Donc y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. De même, pour tout $x<0$, $y(x)=y_-(x)$ et y_- est une solution de $(E-)$. Donc y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$. Enfin, en 0 :
$$0^2y''(0)+3|0|y'(0)+3y(0) = 1+6\times 0^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3\times\frac{1}{3}=1 \qquad\qquad \text{ce qui est vrai.}$$

Donc y est bien une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1+x^3}{3} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{1}{3} + 3x^3 \ln(|x|) + Dx^3 & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{array} \middle| \, D \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Notez que bien que (E) soit une équation différentielle d'ordre 2, un seule constante, un seul degré de liberté apparait dans l'ensemble solution. Cela provient du fait qu'elle n'est pas résolue en y'' et qu'un raccordement est nécessaire.

Problème II - Matrices

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I_3$.

Partie 1 : Gauss ouvre le bal

1. On a les égalités suivantes :

$$N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$N^3 = NN^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad N^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = 0_3.}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in \mathscr{S}_\lambda \quad & \Leftrightarrow \quad AX = \lambda\, X \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2x + y + z \\ -x + 2y - z \\ -2x - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\, x \\ \lambda\, y \\ \lambda\, z \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (2-\lambda)\, x + y + z = 0 \\ -x + (2-\lambda)\, y - z = 0 \\ -2x - (1+\lambda)\, z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + (2-\lambda)\, y - z = 0 \\ (2-\lambda)\, x + y + z = 0 \\ -2x - (1+\lambda)\, z = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2\ .
\end{aligned}$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned}
X \in \mathscr{S}_\lambda \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + (2-\lambda)\, y - z = 0 \\ \left(1 + (2-\lambda)^2\right) y + (1 - (2-\lambda))\, z = 0 \\ -2\,(2-\lambda)\, y + (-1-\lambda+2)\, z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + (2-\lambda)\, L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + (2-\lambda)\, y - z = 0 \\ \left(\lambda^2 - 4\,\lambda + 5\right) y + (\lambda - 1)\, z = 0 \\ 2\,(\lambda - 2)\, y - (\lambda - 1)\, z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + (2-\lambda)\, y - z = 0 \\ \left(\lambda^2 - 4\,\lambda + 5\right) y + (\lambda - 1)\, z = 0 \\ \left(\lambda^2 - 2\,\lambda + 1\right) y = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + (2-\lambda)\, y - z = 0 \\ \left(\lambda^2 - 4\,\lambda + 5\right) y + (\lambda - 1)\, z = 0 \\ (\lambda - 1)^2\, y = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Premier cas, $\lambda = 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
X \in \mathscr{S}_1 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ 0 = 0. \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).}$$

Deuxième cas, $\lambda \neq 1$. Alors,

$$\begin{aligned}
X \in \mathscr{S}_\lambda \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - z = 0 \\ (\lambda - 1)\, z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - z = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{car } \lambda \neq 1
\end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\mathscr{S}_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^3}\}\,.}$$

Partie 2 : Méthode 1, Newton le rejoint pour former un binôme

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de N, on sait que $A = I_3 + N$. De plus, $N^3 = 0_3$ donc pour tout $k \geqslant 3$, $N^k = 0_3$. Or N et I_3 commutent. Donc par la formule du binôme de Newton, on a

$$A^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k.$$

Si $n \geqslant 2$,

$$A^n = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 + 0_3 = I_3 + nN + \frac{n\,(n-1)}{2} N^2.$$

On note que cette formule reste vraie si $n = 0$ ou $n = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{n\,(n-1)}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \left(n^2 - n\right) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + 2n - n^2 & n^2 & 2n - n^2 \\ -n & n+1 & -n \\ n^2 - 3n & n - n^2 & n^2 - 3n + 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 + 2n - n^2 & n^2 & 2n - n^2 \\ -n & n+1 & -n \\ n^2 - 3n & n - n^2 & n^2 - 3n + 1 \end{pmatrix}.}$$

4. En particulier, pour $n = 5$, on a

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 + 10 - 25 & 25 & 10 - 25 \\ -5 & 6 & -5 \\ 25 - 15 & 5 - 25 & 25 - 15 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A^5 = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.}$$

Partie 3 : Méthode 2, Mais Euclide apporte la division

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on admet l'existence de trois réels $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ et d'un polynôme Q_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = (x-1)^3 Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Les fonctions $x \mapsto x^n$ $(x-1)^3$, $x \mapsto Q_n(x)$ et $x \mapsto ax^2 + bx + c$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad nx^{n-1} = 3(x-1)^2 Q_n(x) + (x-1)^3 Q_n'(x) + 2a_n x + b_n.$$

En dérivant une seconde fois, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} n(n-1)x^{n-2} &= 6(x-1)Q_n(x) + 3(x-1)^2 Q_n'(x) + 3(x-1)Q_n'(x) + (x-1)^3 Q_n''(x) + 2a_n \\ &= 6(x-1)Q_n(x) + 6(x-1)^2 Q_n'(x) + (x-1)^3 Q_n''(x) + 2a_n. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{array}{rl} nx^{n-1} & = 3(x-1)^2 Q_n(x) + (x-1)^3 Q_n'(x) + 2a_n x + b_n \\ n(n-1)x^{n-2} & = 6(x-1)Q_n(x) + 6(x-1)^2 Q_n'(x) + (x-1)^3 Q_n''(x) + 2a_n. \end{array}}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Par la question précédente, en prenant $x = 1$, dans les deux égalités on a

$$\begin{aligned} \begin{cases} n = 2a_n + b_n \\ n(n-1) = 2a_n \end{cases} \qquad &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} n = 2a_n + b_n \\ a_n = \frac{n(n-1)}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} b_n = n - 2a_n = n - n(n-1) = -n(n-2) \\ a_n = \frac{n(n-1)}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = (x-1)^3 Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n$, en prenant $x = 1$ encore une fois, on obtient

$$\begin{aligned} & 1 = a_n + b_n + c_n = \frac{n(n-1)}{2} - n(n-2) + c_n \\ \Leftrightarrow \qquad & c_n = n(n-2) - \frac{n(n-1)}{2} + 1 \\ & \quad = \frac{2n^2 - 4n - n^2 + n + 2}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad a_n = \frac{n(n-1)}{2},\ b_n = -n(n-2),\ c_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Par la relation $x^n = (x-1)^3 Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n$, on en déduit que

$$A^n = (A - I_3)^3 Q_n(A) + a_n A^2 + b_n A + c_n I_3 = \underbrace{N^3}_{=0_3} Q_n(A) + a_n A^2 + b_n A + c_n I_3 = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3.$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\boxed{A^n = \frac{n(n-1)}{2} A^2 - n(n-2)A + \frac{(n-1)(n-2)}{2} I_3.}$$

8. En particulier, pour $n = 5$,
$$A^5 = 10A^2 - 15A + 6I_3.$$
Or
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi,
$$A^5 = 10 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 15 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$
Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 4.
$$\boxed{A^5 = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.}$$

Partie 4 : Soyons carrés pour éviter de se prendre les pieds dans les racines

On pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = T - I_3$. On s'intéresse à déterminer l'ensemble des racines carrées de T :
$$\mathscr{R}_T = \left\{ S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; S^2 = T \right\}.$$
Pour ce faire, on pose également $\mathscr{C}_T$ l'ensemble des matrices commutant avec T :
$$\mathscr{C}_T = \{ S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid TS = ST \}.$$
On admet le résultat suivant
$$\mathscr{C}_T = \left\{ aI_3 + bM + cM^2 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

9. Soit $S \in \mathscr{R}_T$. Alors, par définition, $S^2 = T$. Par suite,
$$TS = S^2S = S^3 = SS^2 = ST.$$
Donc $S \in \mathscr{C}_T$. Ceci étant vrai pour $S \in \mathscr{R}_T$ quelconque, on en déduit que
$$\boxed{\mathscr{R}_T \subset \mathscr{C}_T.}$$

10. Soit $S \in \mathscr{R}_T$. Alors par la question précédente, on a $S \in \mathscr{C}_T$. Donc d'après l'énoncé,
$$\exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \qquad S = aI_3 + bM + cM^2.$$
Donc
$$\begin{aligned} T = S^2 &= \left(aI_3 + bM + cM^2\right)\left(aI_3 + bM + cM^2\right) \\ &= a^2I_3 + abM + acM^2 + abM + b^2M^2 + bcM^3 + acM^2 + bcM^3 + c^2M^4 \\ &= a^2I_3 + 2abM + \left(b^2 + 2ac\right)M^2 + 2bcM^3 + c^2M^4. \end{aligned}$$
Or
$$M = T - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Puis,

$$M^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3$$

et donc $M^4=0_3$. On obtient alors que

$$\begin{aligned}
& T=a^2I_3+2abM+\left(b^2+2ac\right)M^2+2bcM^3+c^2M^4\\
\Leftrightarrow\quad & T=a^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+2ab\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\left(b^2+2ac\right)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow\quad & \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&2ab&b^2+2ac\\0&a^2&2ab\\0&0&a^2\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases}a^2=1\\2ab=1\\b^2+2ac=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases}a=1\\b=\frac12\\\frac14+2c=0\ \Leftrightarrow\ c=-\frac18\end{cases}\quad \text{OU}\quad \begin{cases}a=-1\\b=-\frac12\\\frac14-2c=0\ \Leftrightarrow\ c=\frac18\end{cases}\\
\Leftrightarrow\quad & S=aI_3+bM+cM^2=\underbrace{\begin{pmatrix}1&\frac12&-\frac18\\0&1&\frac12\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=S_0}\quad \text{OU}\quad S=\begin{pmatrix}-1&-\frac12&\frac18\\0&-1&-\frac12\\0&0&-1\end{pmatrix}=-S_0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathscr{R}_T\subset\left\{\begin{pmatrix}1&\frac12&-\frac18\\0&1&\frac12\\0&0&1\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}-1&-\frac12&\frac18\\0&-1&-\frac12\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Réciproquement, si $S=S_0=\begin{pmatrix}1&\frac12&-\frac18\\0&1&\frac12\\0&0&1\end{pmatrix}$, alors

$$S_0^2=\begin{pmatrix}1&\frac12&-\frac18\\0&1&\frac12\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac12&-\frac18\\0&1&\frac12\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=T$$

De même, si $S=-S_0$, alors $S^2=(-S_0)(-S_0)=S_0^2=T$. Donc $\{S_0\ ;\ -S_0\}\subset\mathscr{R}_T$. Conclusion, $\mathscr{R}_T$ possède bien exactement deux éléments :

$$\boxed{\mathscr{R}_T=\left\{\begin{pmatrix}1&\frac12&-\frac18\\0&1&\frac12\\0&0&1\end{pmatrix}\ ;\ \begin{pmatrix}-1&-\frac12&\frac18\\0&-1&-\frac12\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\}.}$$

Partie 5 : Pour gagner c'est comme au baseball, il faut savoir changer de base

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\begin{array}{lll}
P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} & L_3 \leftrightarrow L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 + L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

On obtient donc que $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, donc

$$\boxed{\text{la matrice } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.}$$

On n'a pas oublié naturellement de vérifier son résultat :

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = I_3.$$

12. A l'aide de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P^{-1}AP = T.}$$

On considère

$$\mathscr{R}_A = \left\{ B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; B^2 = A \right\}.$$

13. Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Posons $S = P^{-1}BP$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{llll} B \in \mathscr{R}_A & \Leftrightarrow \quad B^2 = A & \Leftrightarrow & P^{-1}B^2P = P^{-1}AP \\ & & \Leftrightarrow & P^{-1}BPP^{-1}BP = T \qquad \text{d'après la question précédente} \\ & & \Leftrightarrow & S^2 = T \\ & & \Leftrightarrow & S \in \mathscr{R}_T. \end{array}$$

14. Avec les notations de la questions précédentes, pour $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

$$B \in \mathscr{R}_A \quad \Leftrightarrow \quad S \in \mathscr{R}_T.$$

Donc par la question 10., en posant $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{array}{llll} B \in \mathscr{R}_A & \Leftrightarrow & S = S_0 \quad \text{OU} & S = -S_0 \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}BP = S_0 \quad \text{OU} & P^{-1}BP = -S_0 \\ & \Leftrightarrow & B = PS_0P^{-1} \quad \text{OU} & B = -PS_0P^{-1}. \end{array}$$

Calculons,

$$\begin{aligned} PS_0P^{-1} &= P \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/4 & 7/4 & -7/4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -5/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{R}_A = \left\{ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & -1 & -3 \\ 2 & -6 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}}.$$

Il est possible de contrôler son résultat en vérifiant que $S_0^2 = A$.

Problème III - Analyse asymptotique

On pose pour $n = 1$,

$$\tan^{[1]} = \tan$$

Puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\tan^{[n+1]} = \tan \circ \tan^{[n]} = \underbrace{\tan \circ \tan \circ \cdots \circ \tan}_{n+1 \text{ fois}}$$

où l'on rappelle que $\circ$ désigne la composition.

Partie 1 : Je compose donc je suis

1. On pose $I_1 = \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$ et $I_2 = \left[-\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) ; \arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

(a) La fonction tan est continue et strictement croissante sur $I_1 \subset \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Donc une conséquence du théorème de la bijection est

$$\boxed{\tan(I_1) = \left[\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\,;\,\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = [-1\,;\,1]\,.}$$

De même la fonction arctan est continue et strictement croissante sur $[-1\,;\,1] \subset \mathbb{R}$, donc

$$\boxed{\arctan([-1\,;\,1]) = [\arctan(-1)\,;\,\arctan(1)] = \left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right] = I_1.}$$

(b) On a par définition,

$$x \in \tan^{-1}([-1\,;\,1]) \quad \Leftrightarrow \quad \tan(x) \in [-1\,;\,1] \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan^{-1}([-1\,;\,1]) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi\,;\,\frac{\pi}{4} + k\pi\right].}$$

(c) La fonction tan est strictement croissante sur $I_2 = \left[-\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\,;\,\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \subset \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Donc

$$\tan(I_2) = \left[\tan\left(-\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\,;\,\tan\left(\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right] = \left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right] = I_1.$$

Donc d'après la question précédente,

$$\tan^{[2]}(I_2) = \tan(\tan(I_2)) = \tan(I_1) = [-1\,;\,1]\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan^{[2]}(I_2) = [-1\,;\,1]\,.}$$

On admet dans la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $I_n = [-\eta_n\,;\,\eta_n]$ un voisinage de 0, centrée en 0, avec $\eta_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\tan^{[n]}$ est bien définie et même $\mathscr{C}^5$ sur I_n. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} \subset I_n.$$

2. (a) On procède par récurrence sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathscr{P}(n) : \quad \text{« } \tan^{[n]} \text{ est impaire sur } I_n. \text{ »}$$

Initialisation. Si $n = 1$, alors tan est une fonction impaire et I_1 est centré en 0. Donc tan est impaire sur I_1.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie. Par hypothèse I_{n+1} est centré en 0. De plus pour $x \in I_{n+1}$, on a $-x \in I_{n+1}$ et

$$\tan^{[n+1]}(-x) = \tan\left(\tan^{[n]}(-x)\right).$$

Or $-x \in I_{n+1} \subset I_n$ et par hypothèse de récurrence, $\tan^{[n]}$ est impaire sur I_n. Donc $\tan^{[n]}(-x) = -\tan^{[n]}(x)$. Ainsi,

$$\tan^{[n+1]}(-x) = \tan\left(-\tan^{[n]}(x)\right).$$

Or la fonction tan est impaire sur son ensemble de définition donc

$$\tan^{[n+1]}(-x) = -\tan\left(\tan^{[n]}(x)\right) = -\tan^{[n+1]}(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in I_{n+1}$, on conclut que $\tan^{[n+1]}$ est impaire sur I_{n+1}.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Conclusion, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la fonction } \tan^{[n]} \text{ est impaire sur } I_n}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que la fonction $\tan^{[n]}$ est $\mathscr{C}^5$ sur I_n un voisinage de 0. Donc on en déduit que la fonction $\tan^{[n]}$ admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 : il existe $(a_n, b_n, c_n, u_n, v_n, w_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\tan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} u_n + a_n x + v_n x^2 + b_n x^3 + w_n x^4 + c_n x^5 + o\left(x^5\right).$$

Or d'après la question 2.a, la fonction $\tan^{[n]}$ est impaire donc

$$u_n = v_n = w_n = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right).}$$

Partie 2 : Il n'y a que le premier pas qui coûte

On admet dans la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\tan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right).$$

3. Par le cours, on a

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right).}$$

Et sa forme normalisée est donnée par

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^4\right)\right).}$$

4. On rappelle également que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

NB : puisque la forme normalisée du sin *permet la factorisation d'un x, nous gagnons un ordre pour le* cos. De plus

$$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o\left(u^2\right).$$

Posons pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $u(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$
- $-u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$
- De plus $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc $u^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{4}$. Donc

$$u^2(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).$$

- Enfin $o\left(u^2(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$.

Ainsi,

$$\frac{1}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) + \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) + o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

Par produit,

$$\begin{aligned}
\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{cccccccc} x & + & \frac{x^3}{2} & + & \frac{5x^5}{24} & + & o\left(x^5\right) \\ & - & \frac{x^3}{6} & - & \frac{x^5}{12} & + & o\left(x^5\right) \\ & & & + & \frac{x^5}{120} & + & o\left(x^5\right) \\ & & & & & + & o\left(x^5\right) \end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{3-1}{6}x^3 + \frac{25-10+1}{120}x^5 + o\left(x^5\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

Et par unicité du développement limité, on retrouve bien que

$$\boxed{a_1 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{b_1 = \frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{c_1 = \frac{2}{15}}.$$

Partie 3 : La meilleure façon de marcher, c'est d'itérer

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right)$.

(a) Par produit nous avons en premier lieu,

$$\begin{aligned}
u_n^2(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right)\right)\left(a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{cccccc} a_n^2 x^2 & + & a_n b_n x^4 & + & o\left(x^5\right) \\ & + & a_n b_n x^4 & + & o\left(x^5\right) \\ & & & + & o\left(x^5\right) \end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} a_n^2 x^2 + 2a_n b_n x^4 + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
u_n^3(x) = u_n(x)u_n^2(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right)\right)\left(a_n^2 x^2 + 2a_n b_n x^4 + o\left(x^5\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{cccccc} a_n^3 x^3 & + & 2a_n^2 b_n x^5 & + & o\left(x^5\right) \\ & + & a_n^2 b_n x^5 & + & o\left(x^5\right) \\ & & & + & o\left(x^5\right) \end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} a_n^3 x^3 + 3a_n^2 b_n x^5 + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{u_n^3(x) \underset{x\to 0}{=} a_n^3 x^3 + 3a_n^2 b_n x^5 + o\left(x^5\right).}$$

(b) On note que, si $a_n \neq 0$, $u_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_n x$. Donc par élévation à la puissance, on obtient que

$$u_n^5(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_n^5 x^5.$$

Ainsi,
$$u_n^5(x) \underset{x\to 0}{=} a_n^5 x^5 + o\left(x^5\right).$$

Si $a_n = 0$, $u_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} o(x)$ et on retrouve que $u_n^5(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} a_n^5 x^5 + o\left(x^5\right)$. Conclusion,
$$\boxed{u_n^5(x) \underset{x\to 0}{=} a_n^5 x^5 + o\left(x^5\right).}$$

Le calcul $u_n^2(x) \times u_n^3(x)$ fonctionnait aussi très bien.

(c) En utilisons les résultats précédents, on a
$$\tan(u) \underset{u\to 0}{=} u + \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + o\left(u^5\right).$$

De plus en posant $u_n(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right)$, alors

- $u_n(x) = \underset{x\to 0}{\to} 0$.
- $\frac{u_n^3(x)}{3} \underset{x\to 0}{=} \frac{a_n^3}{3} x^3 + a_n^2 b_n x^5 + o\left(x^5\right)$.
- $\frac{2u_n^5(x)}{15} \underset{x\to 0}{=} \frac{2a_n^5}{15} x^5 + o\left(x^5\right)$.
- Enfin, $o\left(u_n(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right)$.

Par conséquent,
$$\begin{array}{rcccccccc}
\tan^{[n+1]}(x) = \tan\left(\tan^{[n]}(x)\right) = \tan\left(u_n(x)\right) \underset{x\to 0}{=} & a_n x & + & b_n x^3 & + & c_n x^5 & + & o\left(x^5\right) \\
& & + & \frac{a_n^3}{3} x^3 & + & a_n^2 b_n x^5 & + & o\left(x^5\right) \\
& & & & + & \frac{2a_n^5}{15} x^5 & + & o\left(x^5\right) \\
& & & & & & + & o\left(x^5\right).
\end{array}$$

Conclusion,
$$\boxed{\tan^{[n+1]}(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + \left(\frac{a_n^3}{3} + b_n\right) x^3 + \left(\frac{2a_n^5}{15} + a_n^2 b_n + c_n\right) x^5 + o\left(x^5\right).}$$

(d) Or par définition de a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1}, on a également
$$\tan^{[n+1]}(x) \underset{x\to 0}{=} a_{n+1} x + b_{n+1} x^3 + c_{n+1} x^5 + o\left(x^5\right).$$

Donc par unicité du développement limité, on en déduit que
$$\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n^3}{3} + b_n \\ c_{n+1} = \frac{2a_n^5}{15} + a_n^2 b_n + c_n. \end{cases}}$$

6. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_{n+1} = a_n$. Donc la suite $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est constante}}$ et donc vérifie
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = a_1.$$

Donc par la question 4., on en déduit que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = 1.}$$

(b) On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_{n+1} = \frac{a_n^3}{3} + b_n = \frac{1}{3} + b_n.$$

La suite $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc une suite arithmétique de raison } r = \frac{1}{3}}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = (n-1)\, r + b_1 = \frac{n-1}{3} + b_1 = \frac{n-1}{3} + \frac{1}{3} \qquad \text{d'après la question 4..}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n = \frac{n}{3}.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. Par ce qui précède on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$c_{k+1} = \frac{2a_k^5}{15} + a_k^2 b_k + c_k = \frac{2}{15} + \frac{k}{3} + c_k.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2}{15} + \frac{k}{3}\right) = \frac{2\,(n-1)}{15} + \frac{1}{3}\,\frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{n-1}{30}\,(4+5n)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) = \frac{(n-1)\,(5n+4)}{30}.}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On remarque que $\sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)$ est une somme télescopique. Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) = c_{n-1+1} - c_1 = c_n - c_1 = c_n - \frac{2}{15} \qquad \text{d'après la question 4.}$$

Ainsi, à l'aide de la question précédente,

$$c_n = \frac{(n-1)\,(5n+4)}{30} + \frac{2}{15} = \frac{5n^2 - n - 4 + 4}{30} = \frac{(5n-1)\,n}{30}.$$

On note que la formule reste vraie si $n = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad c_n = \frac{(5n-1)\,n}{30}.}$$

7. En utilisant les questions précédentes pour $n = 5$, on obtient

$$a_5 = 1 \qquad \text{et} \qquad b_5 = \frac{5}{3} \qquad \text{et} \qquad c_5 = \frac{24 \times 5}{30} = \frac{24}{6} = 4.$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan^{[5]}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{5x}{3} + 4x^5 + o\left(x^5\right).}$$