Devoir Maison 6
analyse asymptotique, ensembles et applications

A faire pour le jeudi 22 janvier

Problème I - Analyse asymptotique

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(1+x^2\right) - x. \end{array}$$

Partie 1 : Admirons les courbes heu la courbe de f

1. Justifier que f est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. (a) Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.
   (b) Préciser le comportement de f en $+\infty$ *(existence ou non d'une asymptote/d'une branche parabolique et en cas d'existence, position relative de la courbe par rapport à son asymptote).*
   (c) Déterminer un développement asymptotique de f à l'ordre $\frac{1}{x^4}$ en $+\infty$ *(On ne fera apparaître que des termes de la forme x^α, $\ln^\beta(x)$ et $\frac{1}{x^\gamma}$).*
3. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans J un intervalle que l'on précisera. On note $g = f^{-1}$ sa fonction réciproque.

Partie 2 : Et-qui-va-lent..tement va sûrement

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité à l'ordre n en 0.
5. Calculer le développement limité à l'ordre 4 de f en 0.
6. En déduire $f^{(4)}(0)$.
7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$.
8. Déterminer l'équation de la tangente de f en 0 et préciser la position relative de la courbe de f à sa tangente au voisinage de 0.
9. Soit $h : x \mapsto f(x) - x^2\cos(x) + 2\,\mathrm{sh}(x) - \tan(x)$. Déterminer un équivalent simple de h en 0.

Partie 3 : Une technique primaire mais primordiale, la primitivation

10. (a) **A l'aide du théorème de primitivation** des développements limités, calculer le développement limité à l'ordre 3 de f' en 0.
    (b) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\frac{1}{f'}$.
11. A l'aide de la question 1. déterminer à nouveau mais par un calcul direct le développement limité à l'ordre 3 de $\frac{1}{f'}$ en 0.

Partie 4 : Et le DL fut

12. Déterminer J' le domaine de dérivabilité de g et pour tout $y \in J'$, préciser une expression de $g'(y)$ en fonction de $g(y)$.

13. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g \in \mathscr{C}^k(J', \mathbb{R})$.

14. Justifier que g admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 et que g' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.

On note dans toute la suite $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$ les coefficients du développement limité de g en 0 :

$$g(y) \underset{y \to 0}{=} a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + o\left(y^4\right).$$

15. Préciser a_0.

Partie 5 : Méthode 1, un DL et la vie est plus belle

16. A l'aide de la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ g \circ f(x) = x$, déterminer le développement limité de g en 0 à l'ordre 4.

17. En déduire la tangente de g en 0 ainsi que la position de la courbe de g par rapport à sa tangente. Est-ce cohérent avec la question 8. ?

Partie 6 : Méthode 2, un DL ça vous donne des ailes

18. En fonction de a_1, a_2, a_3, a_4 :

    (a) calculer le développement limité de $g(y)^2$ à l'ordre 4 en 0.

    (b) calculer le développement limité de $g(y)^4$ à l'ordre 4 en 0.

19. A l'aide de la relation $\forall y \in J,\ f \circ g(y) = y$, déterminer à nouveau le développement limité de g en 0 à l'ordre 4.

Partie 7 : Méthode 3, un DL, c'est un bonheur éternel

20. Préciser en fonction des coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 le développement limité de $g'(y)$ en 0 à l'ordre 3.

21. A l'aide de la partie 3 calculer en fonction des coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 le développement limité de $\frac{1}{f'(g(y))}$ en 0 à l'ordre 3.

22. En déduire à nouveau le développement limité de g en 0 à l'ordre 4.

Problème II - Ensembles et applications

Soit E un ensemble et A et B deux parties fixées de E. On pose

$$f \quad : \quad \begin{aligned} \mathscr{P}(E) &\to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X &\mapsto (A \cap X \,,\, B \cap X)\,. \end{aligned}$$

1. On suppose que f est injective sur $\mathscr{P}(E)$.
   (a) Calculer $f(A \cup B)$ et $f(E)$.
   (b) Que peut-on en déduire ?
2. On suppose maintenant que $E = A \cup B$. Soit $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $f(X) = f(Y)$.
   (a) Soit $x \in A$. Montrer que $x \in X \;\Rightarrow\; x \in Y$.
   (b) Montrer que $X \subset Y$.
   (c) Montrer que f est injective.
3. Conclure une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.
4. *(Facultative)* Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.