Correction du Devoir Maison 6 analyse asymptotique, ensembles et applications

Du jeudi 22 janvier

Problème I - Analyse asymptotique

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(1+x^2\right) - x. \end{array}$$

Partie 1 : Admirons les courbes heu la courbe de f

1. La fonction logarithme est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est déifnie et même dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2-2x+1}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.}$$

2. (a) Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - x = -x + \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = -x + 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Or $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\ll} 2\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} -x.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x.}$$

(b) On a pour tout $x > 0$,

$$f(x) + x = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc la fonction f présente $\boxed{\text{une branche asymptotique de direction } y = -x}$ mais ne possède pas d'asymptote en $+\infty$.

(c) On sait que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Posons $u = \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

D'où

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} -x + 2\ln(x) + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).}$$

3. Par la question 1. on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\frac{(x-1)}{1+x^2}.$$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a $f'(x) < 0$. Donc la fonction f est strictement négative sur $\mathbb{R}$ sauf en un seul point. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ elle est notamment continue sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de la bijection, on en déduit que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $J = f(\mathbb{R})$ et de plus,
$$J = f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to-\infty} f(x) \right[.$$
Or par la question 2.a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$ donc
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty.$$
De même, pour tout $x < 0$, on a
$$f(x) = -x + \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -x + 2\ln(|x|) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$
D'où,
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x.$$
Et donc
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty.$$
Attention, bien que le résultat soit opposé, la fonction f n'est pas impaire pour autant, ni paire d'ailleurs. Donc $J =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$. Conclusion,
$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } J = \mathbb{R}.}$$
On note $g = f^{-1}$ sa fonction réciproque.

Partie 2 : Et-qui-va-lent..tement va sûrement

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est définie et même de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Donc d'après le théorème de Taylor-Young, on en déduit que
$$\boxed{f \text{ admet un développement limité à l'ordre } n \text{ en } 0.}$$

5. Rappelons que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Posons cette fois $u = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Dès lors,
$$\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).}$$

6. Puisque f est $\mathscr{C}^4$ en 0, on sait par la formule de Taylor-Young que
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + o\left(x^4\right).$$
Donc par unicité du développement limité, à l'aide de la question précédente, on en déduit que
$$\frac{f^{(4)}(0)}{24} = -\frac{1}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{f^{(4)}(0) = -12.}$$

7. De même que précédemment, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on a

$$\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\, x^{2k}}{k} + o\left(x^{2n}\right).$$

Donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\, x^{2k}}{k} + o\left(x^{2n}\right).$$

Notamment on remarque qu'à part $-x$, tous les termes d'ordre impair sont nuls. Or la fonction f étant de classe $\mathscr{C}^{2n}$ en 0, par la formule de Taylor-Young, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^{2n}\right).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$\forall k \in\in [\![1; n-1]\!],\ \textit{(car } n \geqslant 2\textit{)} \qquad \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 2$, on conclut que,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad f^{(2k+1)}(0) = 0.}$$

8. On sait que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + o\left(x^2\right).$$

On en déduit donc f admet pour tangente en 0 la droite d'équation

$$\boxed{y = -x.}$$

De plus,

$$f(x) + x \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \geqslant 0$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré donc au voisinage de 0, $f(x)+x \geqslant 0$ et donc

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de } 0.}$$

9. Je pressens un ordre 5... On sait par la question 7. que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o\left(x^6\right) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^5\right).$$

De plus,

$$-x^2\cos(x) \underset{x\to 0}{=} -x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -x^2 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^5\right).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{sh}(x) - \tan(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\left(2x + \frac{2x^3}{6} + \frac{2x^5}{120} + o\left(x^5\right) - x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^5}{60} - \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^5}{60} - \frac{8x^5}{60} + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{7x^5}{60} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{array}{rl} h(x) & \underset{x\to 0}{=} f(x) - x^2\cos(x) + 2\operatorname{sh}(x) - \tan(x) \\ & \underset{x\to 0}{=} \begin{array}{cccccc} -x & +x^2 & -\frac{x^4}{2} & & +o\left(x^5\right) \\ & -x^2 & +\frac{x^4}{2} & & +o\left(x^5\right) \\ +x & & & -\frac{7x^5}{60} & +o\left(x^5\right) \end{array} \\ & \underset{x\to 0}{=} -\frac{7x^5}{60} + o\left(x^5\right). \end{array}$$

Tiens oui c'était bien de l'ordre 5. Conclusion,

$$\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{7x^5}{60}.}$$

Partie 3 : Une technique primaire mais primordiale, la primitivation

10. (a) Par la question 5., on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).$$

De plus f est $\mathscr{C}^4$ en 0 donc f' existe et f' est même $\mathscr{C}^3$ en 0. Donc par le théorème de Taylor-Young, il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o\left(x^3\right).$$

Or f est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème de primitivation des développements limités, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_3}{4}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Donc par unicité du développement limité :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \text{ OK} \\ a_0 = -1 \\ \frac{a_1}{2} = 1 \\ \frac{a_2}{3} = 0 \\ \frac{a_3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -2 \end{cases}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + 2x - 2x^3 + o\left(x^3\right).}$$

On vérifie que cela correspond bien à la dérivation du développement limité de f.

(b) Par la question précédente, au voisinage de 0, on a

$$\frac{1}{f'(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{-1 + 2x - 2x^3 + o\left(x^3\right)} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{1 - 2x + 2x^3 + o\left(x^3\right)}$$

On sait que $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o\left(u^3\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -2x + 2x^3 + o\left(x^3\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(-2x + 2x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(-2x + 2x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} 4x^2 + o\left(x^3\right).$$

- Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -2x$, alors $u(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} -8x^3$ et donc
$$u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} -8x^3 + o\left(x^3\right).$$
- Enfin $o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f'(x)} &\underset{x\to 0}{=} -\tfrac{1}{1+u(x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} -\big(1+2x \quad -2x^3 + o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad +4x^2 \quad + o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad +8x^3 + o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad + o\left(x^3\right)\big) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\left(1+2x+4x^2+6x^3+o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -1-2x-4x^2-6x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{f'(x)} \underset{x\to 0}{=} -1-2x-4x^2-6x^3+o\left(x^3\right).}$$

11. Par la question 1., on a
$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$
Donc
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1+x^2}{(1-x)^2}.$$
Or, on a
$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} &\underset{x\to 0}{=} 1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-3)}{2}(-x)^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{6}(-x)^3+o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-3)}{2}(-x)^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{6}(-x)^3+o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+2x+3x^2+4x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned}
\frac{1}{f'(x)} &\underset{x\to 0}{=} -\left(1+x^2\right)\left(1+2x+3x^2+4x^3+o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -1-2x \quad -3x^2-4x^3+o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\quad -x^2-2x^3+o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -1-2x-4x^2-6x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$
Oooh ! On retrouve le résultat de la question précédente :
$$\boxed{\frac{1}{f'(x)} \underset{x\to 0}{=} -1-2x-4x^2-6x^3+o\left(x^3\right).}$$

Partie 4 : Et le DL fut

12. Par ce qui précède, on a

- la fonction f est strictement monotone (décroissante) sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$,
- la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$,
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$
Donc pour tout $x \in]-\infty;1[$, $f'(x) \neq 0$ et de même pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f'(x) \neq 0$.

Donc en appliquant le théorème de la dérivée de la fonction réciproque sur **l'intervalle** $]-\infty;1[$ d'une part et sur l'intervalle $]1;+\infty[$ d'autre part, on en déduit que g est dérivable sur $f(]-\infty;1[)$ et sur $f(]1;+\infty[)$. Or $f(1) = \ln(2) - 1$ et par le théorème de la bijection,

$$f(]-\infty;1[) = \left]f(1); \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[=]\ln(2)-1;+\infty[\qquad \text{et} \qquad f(]1;+\infty[) =]-\infty;\ln(2)-1[.$$

D'où,

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } J' = \mathbb{R} \setminus \{\ln(2)-1\}.}$$

De plus,

$$\forall y \in J', \qquad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Donc par la question 1.

$$\boxed{\forall y \in J', \qquad g'(y) = -\frac{1+g(y)^2}{(1-g(y))^2}.}$$

13. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(k): \qquad \text{« } g \in \mathscr{C}^k(J', \mathbb{R}). \text{ »}$$

Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $k = 0$, alors par la question précédente, on sait que g est dérivable et donc continue sur J'. Donc $g \in \mathscr{C}^0(J', \mathbb{R})$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)$. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, g est $\mathscr{C}^k$ sur J'. De plus, puisque g est bijective, si $y \neq \ln(2) - 1 = f(1)$, alors $g(y) \neq 1$. Donc pour tout $y \in J'$, $(1-g(y))^2 \neq 0$. Donc la fonction $y \mapsto \frac{1+g(y)^2}{(1-g(y))^2}$ est $\mathscr{C}^k$ sur J' comme somme et quotient de fonctions $\mathscr{C}^k$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur J'. Or pour tout $y \in J'$, $g'(y) = -\frac{1+g(y)^2}{(1-g(y))^2}$. Donc g' est $\mathscr{C}^k$ sur J. Par suite, g est $\mathscr{C}^{k+1}$ sur J'. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie i.e.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad g \in \mathscr{C}^k(J', \mathbb{R}).}$$

14. Par la question précédente, g est $\mathscr{C}^4$ sur J' donc notamment en 0 (car $\ln(2) - 1 \neq 0$) et donc g' est $\mathscr{C}^3$ en 0. Donc par le théorème de Taylor-Young, on en déduit que

$$\boxed{g, \text{ respectivement } g', \text{ admet un développement limité à l'ordre 4, respectivement 3, en 0.}}$$

On note dans toute la suite $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$ les coefficients du développement limité de g en 0 :

$$g(y) \underset{y\to 0}{=} a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + o(y^4).$$

15. Puisque $f(0) = 0$ et que $g = f^{-1}$, on en déduit que $g(0) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{g(0) = 0.}$$

Partie 5 : Méthode 1, un DL et la vie est plus belle

16. Par la question 5. on a
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x+x^2-\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right).$$
Donc
- $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,
$$\begin{aligned} f(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(-x+x^2-\tfrac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)\right)\left(-x+x^2-\tfrac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 \quad -x^3 \quad +o\left(x^4\right)\\ &\qquad\quad -x^3+x^4 \quad +o\left(x^4\right)\\ &\qquad\qquad\qquad +o\left(x^4\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2-2x^3+x^4+o\left(x^4\right). \end{aligned}$$
- Puis,
$$\begin{aligned} f(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(-x+x^2-\tfrac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)\right)\left(x^2-2x^3+x^4+o\left(x^4\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -x^3 \quad +2x^4 \quad +o\left(x^4\right)\\ &\qquad\qquad +x^4 \quad +o\left(x^4\right)\\ &\qquad\qquad\qquad +o\left(x^4\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -x^3+3x^4+o\left(x^4\right). \end{aligned}$$
- Comme $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$, alors $f(x)^4 \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ et donc
$$f(x)^4 \underset{x\to 0}{=} x^4+o\left(x^4\right).$$
- Enfin, $o\left(f(x)^4\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$.

Forts de ces calculs, nous obtenons donc que
$$\begin{aligned} g(f(x)) &\underset{x\to 0}{=} a_1f(x)+a_2f(x)^2+a_3f(x)^3+a_4f(x)^4+o\left(f(x)^4\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -a_1x \quad +a_1x^2 \quad -a_1\tfrac{x^4}{2} \quad +o\left(x^4\right)\\ &\qquad\qquad +a_2x^2 \quad -2a_2x^3 \quad +a_2x^4 \quad +o\left(x^4\right)\\ &\qquad\qquad\qquad -a_3x^3 \quad +3a_3x^4 \quad +o\left(x^4\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +a_4x^4 \quad +o\left(x^4\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^4\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -a_1x+(a_1+a_2)x^2-(2a_2+a_3)x^3+\left(-\tfrac{a_1}{2}+a_2+3a_3+a_4\right)x^4+o\left(x^4\right) \end{aligned}$$
Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(f(x))=x$ et donc $g(f(x)) \underset{x\to 0}{=} x+o\left(x^4\right)$. Donc par unicité du développement limité, on a
$$\begin{cases} -a_1=1\\ a_1+a_2=0\\ 2a_2+a_3=0\\ -\frac{a_1}{2}+a_2+3a_3+a_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=-1\\ a_2=-a_1=1\\ a_3=-2a_2=-2\\ a_4=\frac{a_1}{2}-a_2-3a_3=-\frac{1}{2}-1+6=\frac{9}{2}. \end{cases}$$
Conclusion,
$$\boxed{g(y) \underset{y\to 0}{=} -y+y^2-2y^3+\frac{9}{2}y^4+o\left(y^4\right).}$$

17. Par la question précédente, on en déduit que la tangente de g en 0 a pour équation

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T(x) = -x.}$$

De plus,

$$g(y) + y \underset{y\to 0}{\sim} y^2 > 0.$$

Or deux équivalents ont le même signe au voisinage considéré donc

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } g \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de } 0.}$$

Cela est bien cohérent avec la question 8. car la tangente de g en 0 s'obtient à partir de celle de f par la symétrie axiale d'axe $y = x$. Or la droite $y = -x$ est bien son propre symétrique. De plus puisque f est en-dessous de cette tangente, par symétrie par rapport à $y = x$, g se trouve bien au-dessus au voisinage de 0.

Partie 6 : Méthode 2, un DL ça vous donne des ailes

18. (a) Puisque $g(y) \underset{y\to 0}{=} a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 + o\left(y^4\right)$, on a

$$\begin{aligned}
g(y)^2 &\underset{y\to 0}{=} \left(a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 + o\left(y^4\right)\right)\left(a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 + o\left(y^4\right)\right)\\
&\underset{y\to 0}{=} \begin{array}{llll} a_1^2y^2 & +a_1a_2y^3 & +a_1a_3y^4 & +o\left(y^4\right)\\ & +a_1a_2y^3 & +a_2^2y^4 & +o\left(y^4\right)\\ & & +a_1a_3y^4 & +o\left(y^4\right)\\ & & & +o\left(y^4\right)\end{array}\\
&\underset{y\to 0}{=} a_1^2y^2 + 2a_1a_2y^3 + \left(2a_1a_3 + a_2^2\right)y^4 + o\left(y^4\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{g(y)^2 \underset{y\to 0}{=} a_1^2y^2 + 2a_1a_2y^3 + \left(2a_1a_3 + a_2^2\right)y^4 + o\left(y^4\right).}$$

(b) Si $a_1 \neq 0$ *(important !)* alors $g(y) \underset{y\to 0}{\sim} a_1y$. Par élévation à la puissance, $g(y)^4 \underset{y\to 0}{\sim} a_1^4y^4$ et $g(y)^4 \underset{y\to 0}{=} a_1^4y^4 + o\left(y^4\right)$. Si $a_1 = 0$, alors $g(y) \underset{y\to 0}{=} o(y)$ et donc $g(y)^4 \underset{y\to 0}{=} a_1^4y^4 + o\left(y^4\right)$ reste vrai dans ce cas. Conclusion,

$$\boxed{g(y)^4 \underset{y\to 0}{=} a_1^4y^4 + o\left(y^4\right).}$$

19. Par continuité de g en 0, $g(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} g(0) = 0$. Or par la question 5. $f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)$. On obtient donc que

$$f\left(g(y)\right) \underset{y\to 0}{=} -g(y) + g(y)^2 - \frac{g(y)^4}{2} + o\left(g(y)^4\right).$$

Or par les questions précédentes, on sait que

$$\begin{aligned}
g(y) &\underset{y\to 0}{=} a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 + o\left(y^4\right)\\
g(y)^2 &\underset{y\to 0}{=} a_1^2y^2 + 2a_1a_2y^3 + \left(2a_1a_3 + a_2^2\right)y^4 + o\left(y^4\right)\\
g(y)^4 &\underset{y\to 0}{=} a_1^4y^4 + o\left(y^4\right).
\end{aligned}$$

On en déduit également que $o\left(g(y)^4\right) \underset{y\to 0}{=} o\left(y^4\right)$. D'où,

$$f\left(g(y)\right) \underset{y\to 0}{=} -a_1y + \left(a_1^2 - a_2\right)y^2 + \left(2a_1a_2 - a_3\right)y^3 + \left(2a_1a_3 + a_2^2 - a_4 - \frac{a_1^4}{2}\right)y^4 + o\left(y^4\right).$$

Or
$$f(g(y)) = y \underset{y\to 0}{=} y + o\left(y^4\right).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} -a_1 = 1 \\ a_1^2 - a_2 = 0 \\ 2a_1a_2 - a_3 = 0 \\ 2a_1a_3 + a_2^2 - a_4 - \frac{a_1^4}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = a_1^2 = 1 \\ a_3 = 2a_1a_2 = -2 \\ a_4 = 2a_1a_3 + a_2^2 - \frac{a_1^4}{2} = 4 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{g(y) \underset{y\to 0}{=} -y + y^2 - 2y^3 + \frac{9y^4}{2} + o\left(y^4\right).}$$

Partie 7 : Méthode 3, un DL, c'est un bonheur éternel

20. Par la question 14. on sait que g admet un développement limité d'ordre 3 en 0 : il existe $(b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que
$$g'(y) \underset{y\to 0}{=} b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + o\left(y^3\right).$$
Or g est une primitive de g sur J', donc par le théorème de primitivation des développements limités, on a
$$g(y) \underset{y\to 0}{=} b_0y + \frac{b_1}{2}y^2 + \frac{b_2}{3}y^3 + \frac{b_3}{4}y^4 + o\left(y^4\right).$$
Or on a $g(y) \underset{y\to 0}{=} a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 + o\left(y^4\right)$. Donc par unicité du développement limité,
$$\begin{cases} b_0 = a_1 \\ \frac{b_1}{2} = a_2 \\ \frac{b_2}{3} = a_3 \\ \frac{b_3}{4} = a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_0 = a_1 \\ b_1 = 2a_2 \\ b_2 = 3a_3 \\ b_3 = 4a_4. \end{cases}$$
Conclusion,
$$\boxed{g'(y) \underset{y\to 0}{=} a_1 + 2a_2y + 3a_3y^2 + 4a_4y^3 + o\left(y^3\right).}$$

21. Dans la partie 3 on a vu que $\frac{1}{f'(x)} \underset{x\to 0}{=} -1 - 2x - 4x^2 - 6x^3 + o\left(x^3\right)$. Or on sait également que $g(y) \underset{y\to 0}{=} a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + o\left(y^3\right) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$. Puis nous avions également calculé que
$$g(y)^2 \underset{y\to 0}{=} a_1^2y^2 + 2a_1a_2y^3 + \left(2a_1a_3 + a_2^2\right)y^4 + o\left(y^4\right) \underset{y\to 0}{=} a_1^2y^2 + 2a_1a_2y^3 + o\left(y^3\right).$$
Par suite,
$$g(y)^3 = g(y)g(y)^2 \underset{y\to 0}{=} \left(a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + o\left(y^3\right)\right)\left(a_1^2y^2 + 2a_1a_2y^3 + o\left(y^3\right)\right) \underset{y\to 0}{=} a_1^3y^3 + o\left(y^3\right).$$
Enfin,
$$o\left(g(y)^3\right) \underset{y\to 0}{=} o\left(y^3\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f'(g(y))} &\underset{y\to 0}{=} -1-2g(y)-4g(y)^2-6g(y)^3+o\left(g(y)^3\right)\\
&\underset{y\to 0}{=} -1-2a_1y \quad -2a_2y^2 \quad -2a_3y^3 \quad +o\left(y^3\right)\\
&\qquad\qquad\qquad -4a_1^2y^2 \quad -8a_1a_2y^3 \quad +o\left(y^3\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -6a_1^3y^3 \quad +o\left(y^3\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(y^3\right)\\
&\underset{y\to 0}{=} -1-2a_1-\left(2a_2+4a_1^2\right)y^2-\left(2a_3+8a_1a_2+6a_1^3\right)y^3+o\left(y^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{f'(g(y))} \underset{y\to 0}{=} -1-2a_1-\left(2a_2+4a_1^2\right)y^2-\left(2a_3+8a_1a_2+6a_1^3\right)y^3+o\left(y^3\right).}$$

22. Par les deux questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}
g'(y) &\underset{y\to 0}{=} a_1+2a_2y+3a_3y^2+4a_4y^3+o\left(y^3\right)\\
\frac{1}{f'(g(y))} &\underset{y\to 0}{=} -1-2a_1-\left(2a_2+4a_1^2\right)y^2-\left(2a_3+8a_1a_2+6a_1^3\right)y^3+o\left(y^3\right).
\end{aligned}$$

Or on sait que pour tout $y\in J'$, (et donc notamment au voisinage de 0) on a $\frac{1}{f'(g(y))}=g'(y)$. Donc par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} a_1=-1\\ 2a_2=-2a_1\\ 3a_3=-\left(2a_2+4a_1^2\right)\\ 4a_4=-\left(2a_3+8a_1a_2+6a_1^3\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=-1\\ a_2=-a_1=1\\ a_3=-\frac{2a_2+4a_1^2}{3}=-\frac{2+4}{3}=-2\\ a_4=-\frac{2a_3+8a_1a_2+6a_1^3}{4}=-\frac{-4-8-6}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}.\end{cases}$$

Rien à faire, ou trouve toujours les mêmes coefficients :

$$\boxed{g(y)\underset{y\to 0}{=} -y+y^2-2y^3+\frac{9y^4}{2}+o\left(y^4\right).}$$

Problème II - Ensembles et applications

Soit E un ensemble et A et B deux parties fixées de E. On pose

$$f \; : \; \begin{aligned} \mathscr{P}(E) &\to \mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B)\\ X &\mapsto (A\cap X\,,\,B\cap X)\,. \end{aligned}$$

1. On suppose que f est injective sur $\mathscr{P}(E)$.

   (a) Posons $X=A\cup B$. Alors

   $$f(A\cup B)=f(X)=(A\cap X\,,\,B\cap X)=(A\cap(A\cup B)\,,\,B\cap(A\cup B))$$

   Or $A\subset A\cup B$ et $B\subset A\cup B$. Donc $A\cap(A\cup B)=A$ et $B\cap(A\cup B)=B$. Conclusion,

   $$\boxed{f(A\cup B)=(A\,,\,B)\,.}$$

   Posons maintenant $X=E$. Alors

   $$f(E)=f(X)=(A\cap X\,,\,B\cap X)=(A\cap E\,,\,B\cap E)=(A\,,\,B)\,.$$

   Comme $A\subset E$ et $B\subset E$, on a aussi,

   $$\boxed{f(E)=(A\,,\,B)\,.}$$

(b) Nous avons établi dans la question précédente que

$$f(A \cup B) = (A\,,\,B) = f(E)\,.$$

Or la fonction f est injective. Donc, on en déduit que

$$\boxed{A \cup B = E.}$$

2. On suppose maintenant que $E = A \cup B$. Soit $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $f(X) = f(Y)$.

   (a) Soit $x \in A$. Montrons que $x \in X \Rightarrow x \in Y$. Supposons donc que $x \in X$ et montrons que $x \in Y$. Par hypothèse, on a $f(X) = f(Y)$. Autrement dit

   $$(A \cap X, B \cap X) = (A \cap Y, B \cap Y) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} A \cap X = A \cap Y \\ B \cap X = B \cap Y \end{cases}.$$

   On a supposé que $x \in A$ et $x \in X$. Donc $x \in A \cap X = A \cap Y$. Or $A \cap Y \subset Y$ donc $x \in Y$. Ceci étant vrai pour $x \in X$ quelconque, on en conclut que

   $$\boxed{x \in X \Rightarrow x \in Y.}$$

   (b) Montrons que $X \subset Y$ i.e. $\forall x \in E, x \in X \Rightarrow x \in Y$. Fixons $x \in E$. Par hypothèse, $E = A \cup B$. Donc $x \in A$ ou $x \in B$.
   Premier cas, supposons $x \in A$. Par la question précédente, on a bien

   $$x \in X \Rightarrow x \in Y.$$

   Deuxième cas, supposons $x \in B$. Alors comme dans la question précédente, pour $x \in X$, on a $x \in X \cap B$. Or $B \cap X = B \cap Y$. Donc $x \in B \cap Y \subset Y$ et donc $x \in Y$. Ainsi, on a encore

   $$x \in X \Rightarrow x \in Y.$$

   Finalement dans tous les cas, on a $x \in X \Rightarrow x \in Y$:

   $$\forall x \in E, \qquad x \in X \Rightarrow x \in Y.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{X \subset Y.}$$

   (c) Montrons que f est injective. Autrement dit, on veut montrer que

   $$\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2, \qquad f(X) = f(Y) \qquad \Rightarrow \qquad X = Y.$$

   Soit $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $f(X) = f(Y)$. Alors par la question précédente, on a $X \subset Y$. Par symétrie des hypothèses sur X et Y, on peut montrer exactement de la même façon que $Y \subset X$. Donc

   $$X = Y.$$

   Ainsi,

   $$\forall (X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2, \qquad f(X) = f(Y) \qquad \Rightarrow \qquad X = Y.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

3. Par la question 1. on a

   $$f \text{ injective} \qquad \Rightarrow \qquad E = A \cup B.$$

   Réciproquement, par la question 2.

   $$E = A \cup B \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ injective.}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{f \text{ injective} \qquad \Leftrightarrow \qquad E = A \cup B.}$$

4. *(Facultative)* Supposons dans un premier temps f surjective et montrons alors que $A \cap B = \emptyset$. Procédons par l'absurde et supposons que $A \cap B \neq \emptyset$. Autrement dit supposons qu'il existe $e \in A \cap B$. Posons $A_1 = A \setminus \{e\}$ et $B_1 = \{e\}$. Puisque $e \in A \cap B \subset B$, on en déduit que $B_1 \in \mathscr{P}(B)$ et par définition de A_1, $A_1 \in \mathscr{P}(A)$. Donc $(A_1, B_1) \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$. Or f est surjective donc il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ telle que $f(X) = (A_1, B_1)$ i.e. telle que

$$(A \cap X \,,\, B \cap X) = (A \setminus \{e\} \,,\, \{e\}) \,.$$

Comme $B \cap X = \{e\}$, on en déduit que $e \in B \cap X$ et en particulier $e \in X$. Or par définition de e, on a $e \in A$. Donc $e \in A \cap X$. Or $A \cap X = A \setminus \{e\}$. Donc $e \in A \setminus \{e\}$ ce qui est contradictoire. Donc si f est surjective, alors $A \cap B = \emptyset$.

Réciproquement supposons $A \cap B = \emptyset$ et montrons que f est surjective. Soit $(A_1, B_1) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. Montrons qu'il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = (A_1, B_1)$. Posons

$$X = A_1 \cup B_1.$$

Puisque $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$ et que A et B sont disjointes : $A \cap B = \emptyset$, on en déduit que A_1 et B_1 sont aussi disjoints, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$. Alors l'union est disjointe :

$$X = A_1 \sqcup B_1.$$

Montrons que $A \cap X = A_1$. Soit $x \in A \cap X$. Alors $x \in X = A_1 \sqcup B_1$ donc $x \in A_1$ ou $x \in B_1$.

Montrons que $x \in A_1$ en procédant par l'absurde. Supposons que $x \in B_1 \subset B$ alors $x \in B$. Or $x \in A \cap X$, donc $x \in A$. Donc $x \in A \cap B = \emptyset$ ce qui est impossible. Donc $x \notin B_1$. Donc nécessairement $x \in A_1$.

Résumons, on a pris $x \in A \cap X$ et on a montré que $x \in A_1$. Ainsi,

$$A \cap X \subset A_1.$$

Réciproquement, si $x \in A_1 \subset A$, alors $x \in A$. De plus, $A_1 \subset A_1 \sqcup B_1 = X$. Donc $x \in A_1 \subset X$ implique aussi $x \in X$. Dès lors, $x \in A \cap X$. D'où $A_1 \subset A \cap X$. On a donc montré que

$$A \cap X = A_1.$$

Par symétrie des hypothèses, on montre de la même manière que $B_1 = B \cap X$. Ainsi, pour $X = A_1 \sqcup B_1$, on a bien

$$f(X) = (A_1 \,,\, B_1) \,.$$

Donc (A_1, B_1) possède un antécédent par f.

Ceci étant vrai pour tout $(A_1, B_1) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$, on conclut que f est surjective.

Finalement,

$$\boxed{f \text{ surjective} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \cap B = \emptyset.}$$