Devoir Maison 7
continuité-dérivabilité, polynômes, espaces vectoriels

A faire pour le mardi 24 février

Problème I - Continuité, dérivabilité

Partie 1 : Le taux de τ détonne

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et deux fois dérivable sur $]a;b[$. On suppose que pour tout $x \in]a;b[$, $g''(x) \geqslant 0$ et on note

$$\forall x \in]a;b[, \qquad \tau(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

1. Justifier que τ est $\mathscr{C}^1$ sur $]a;b[$ et calculer sa dérivée.
2. Soit $x \in]a;b[$. Montrer qu'il existe $c_x \in]a;x[$ tel que $\tau'(x) = \frac{g'(x)-g'(c_x)}{x-a}$.
3. Conclure que τ est croissante sur $]a;b[$.

Partie 2 : A appliquer deux fois par jour

Soit

$$f : \begin{array}{ccc}]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arcsin(x^2)}{x} \end{array}$$

4. A l'aide de la partie précédente démontrer que f est croissante sur $]0;1[$.
5. Calculer la dérivée de f sur $]0;1[$.
6. En déduire que pour tout $t \in]0;1[$, $\arcsin(t) \leqslant \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$.
7. Montrer que pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}$.
8. Montrer que f est $\frac{4}{\sqrt{3}}$-lipschitzienne sur $\left]0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

Partie 3 : Recollons les morceaux

On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\arcsin(x^2)}{x} & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in [-1;0[\end{cases} \end{array}.$$

9. Justifier que φ est continue sur $[-1;1]$.
10. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;1[$.
11. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$.
    (b) Montrer que φ n'est pas $\mathscr{C}^5$ en 0.

Problème II - Polynômes

Partie 1 : Trouver la différence...

On appelle cotangente, notée cotan la fonction définie lorsque c'est possible par $\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de cotan.
2. Justifier que les fonctions cotan et $\frac{1}{\tan}$ ne sont pas égales partout.
3. Montrer que cotan définit une bijection sur $]0;\pi[$ dans un ensemble que l'on précisera et tracer l'allure de son graphe sur $]0;\pi[$.

L'objectif de ce problème est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ en utilisant un résultat obtenu grâce à des polynômes.

Partie 2 : Une série limitée

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n}$.

4. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
5. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
6. Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent.

Partie 3 : Il faut prendre le problème par la racine

Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à déterminer tous les polynômes $R_n \in \mathbb{C}[X]$ solutions de l'équation

$$(E_n) \qquad (X-1)\,R_n' = nR_n.$$

On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des solutions de (E_n) dans $\mathbb{C}[X]$.

7. Montrer que $\mathscr{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
8. Préciser $\mathscr{S}_0$.

On fixe désormais $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $R_n \in \mathscr{S}_n$. On suppose R_n non constant.

9. Quel théorème garantit l'existence d'une racine $a \in \mathbb{C}$ de R_n ?
   On fixe $a \in \mathbb{C}$ une racine de R_n. On note $p \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité.
10. Montrer que
$$nR_n^{(p-1)} = (X-1)\,R_n^{(p)} + (p-1)\,R_n^{(p-1)}.$$
11. En déduire que $a = 1$ puis la factorisation de R_n dans $\mathbb{C}$ en fonction de p et d'un coefficient $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
12. Montrer que $p = n$.
13. En conclure que $\mathscr{S}_n = \text{Vect}\left((X-1)^n\right)$. *On pensera bien à justifier l'inclusion réciproque.*

Partie 4 : Découper Q_n en petits morceaux pour mieux l'apprécier

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, on note $\omega_k = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

14. Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Déterminer une relation entre ω_{n-k} et ω_k.

On pose $R_n = (X-1)^n$ et $Q_n = R_n(X+2) - R_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

15. Préciser Q_2, Q_3 et Q_4.
16. Montrer que Q_n est de même parité que $n+1$.
17. A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.
18. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \left\{ -i\,\omega_k \mid k \in [\![1; n-1]\!] \right\}.$$
19. A l'aide de la question 3. des préliminaires montrer que Q_n possède au moins $n-1$ racines distinctes.
20. Préciser la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.
21. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En déduire la factorisation de Q_{2m+1} dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie 5 : P_n n'est qu'un déguisement de Q_n

On considère toujours $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.

22. Préciser P_2 et P_3.
23. (a) Soit $t \in \mathbb{C}$. Simplifier $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} t^{2n-2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1} t^{2n-2k}$.
    (b) En déduire que
$$Q_{2n+1}(X) = 2P_n\left(X^2\right).$$
24. En déduire que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $-\operatorname{cotan}^2\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ sont des racines de P_n et qu'il n'y en a pas d'autre.
25. Rappeler les deux relations racines-coefficients pour un polynôme scindé quelconque.
26. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Partie 6 : Conséquence constructive, conclusion convaincante et même consécration complète

27. Montrer que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.
28. En déduire que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(x)$.
29. Soit $k \in [\![1; n]\!]$. En appliquant l'inégalité précédente à $\frac{k\pi}{2n+1}$, en déduire un encadrement de $\frac{1}{k^2}$.
30. En déduire un encadrement puis un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
31. Conclure en précisant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Problème III

Espaces vectoriels

Pour E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on pose $F = \{ P \in E \mid P(0) = P(1) = 0_{\mathbb{R}} \}$.

Partie 1 : La base, c'est s'adapter.

On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}_4[X]$ et on pose $\mathscr{B} = \big(1, X, X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1)\big)$.

1. Rappeler sans démonstration la base canonique de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que $\mathscr{B}$ est génératrice de E.
4. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.
5. Montrer que $\mathscr{B}_F = \big(X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1)\big)$ est une base de F.
6. En déduire que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans E.

Partie 2 : La division unifie le tout !

On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}[X]$ et on admet que F est un sous-espace vectoriel de E.

7. Montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe.
8. Soit $P \in E$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X(X-1)$ en fonction de $P(0)$ et $P(1)$.
9. En déduire que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans E.