

Devoir Maison 8

Polynômes, espaces vectoriels, séries

A faire pour le mardi 24 mars

Problème I - Polynômes

Partie 1 : Trouver la différence...

On appelle cotangente, notée \cotan la fonction définie lorsque c'est possible par $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de \cotan .
2. Justifier que les fonctions \cotan et $\frac{1}{\tan}$ ne sont pas égales partout.
3. Montrer que \cotan définit une bijection sur $]0; \pi[$ dans un ensemble que l'on précisera et tracer l'allure de son graphe sur $]0; \pi[$.

L'objectif de ce problème est de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ en utilisant un résultat obtenu grâce à des polynômes.

Partie 2 : Une série limitée

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n}$.

4. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
5. Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
6. Montrer que les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent.

Partie 3 : Il faut prendre le problème par la racine

Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à déterminer tous les polynômes $R_n \in \mathbb{C}[X]$ solutions de l'équation

$$(E_n) \quad (X-1)R_n' = nR_n.$$

On note \mathcal{S}_n l'ensemble des solutions de (E_n) dans $\mathbb{C}[X]$.

7. Montrer que \mathcal{S}_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
8. Préciser \mathcal{S}_0 .

On fixe désormais $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $R_n \in \mathcal{S}_n$. On suppose R_n non constant.

9. Quel théorème garantit l'existence d'une racine $a \in \mathbb{C}$ de R_n ?

On fixe $a \in \mathbb{C}$ une racine de R_n . On note $p \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité.

10. Montrer que

$$nR_n^{(p-1)} = (X-1)R_n^{(p)} + (p-1)R_n^{(p-1)}.$$

11. En déduire que $a = 1$ puis la factorisation de R_n dans \mathbb{C} en fonction de p et d'un coefficient $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
12. Montrer que $p = n$.
13. En conclure que $\mathcal{S}_n = \text{Vect}((X-1)^n)$. On pensera bien à justifier l'inclusion réciproque.

Partie 4 : Découper Q_n en petits morceaux pour mieux l'apprécier

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on note $\omega_k = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

14. Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Déterminer une relation entre ω_{n-k} et ω_k .

On pose $R_n = (X-1)^n$ et $Q_n = R_n(X+2) - R_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

15. Préciser Q_2 , Q_3 et Q_4 .

16. Montrer que Q_n est de même parité que $n+1$.

17. A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n .

18. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{-i\omega_k \mid k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket\}.$$

19. A l'aide de la question 3. des préliminaires montrer que Q_n possède au moins $n-1$ racines distinctes.

20. Préciser la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.

21. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En déduire la factorisation de Q_{2m+1} dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie 5 : P_n n'est qu'un déguisement de Q_n

On considère toujours $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose $P_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^k$.

22. Préciser P_2 et P_3 .

23. (a) Soit $t \in \mathbb{C}$. Simplifier $A = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^{2k} t^{2n-2k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1} t^{2n-2k}$.

(b) En déduire que

$$Q_{2n+1}(X) = 2P_n(X^2).$$

24. En déduire que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $-\cotan^2\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$ sont des racines de P_n et qu'il n'y en a pas d'autre.

25. Rappeler les deux relations racines-coefficients pour un polynôme scindé quelconque.

26. En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Partie 6 : Conséquence constructive, conclusion convaincante et même consécration complète

27. Montrer que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

28. En déduire que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cotan^2(x)$.

29. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. En appliquant l'inégalité précédente à $\frac{k\pi}{2n+1}$, en déduire un encadrement de $\frac{1}{k^2}$.

30. En déduire un encadrement puis un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

31. Conclure en précisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Problème II

Espaces vectoriels

Pour E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on pose $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0_{\mathbb{R}}\}$.

Partie 1 : La base, c'est s'adapter.

On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}_4[X]$ et on pose $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1))$.

1. Rappeler sans démonstration la base canonique de E .
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
3. Montrer que \mathcal{B} est génératrice de E .
4. Montrer que \mathcal{B} est une base de E .
5. Montrer que $\mathcal{B}_F = (X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1))$ est une base de F .
6. En déduire que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans E .

Partie 2 : La division unifie le tout !

On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}[X]$ et on admet que F est un sous-espace vectoriel de E .

7. Montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe.
8. Soit $P \in E$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X(X-1)$ en fonction de $P(0)$ et $P(1)$.
9. En déduire que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans E .

Problème III - Séries

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer les valeurs de a et α pour lesquelles la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3) \cdots (1+a^n)}.$$

Partie 1 : Le cas nul n'est pas si mauvais

On suppose dans cette partie que $a = 0$.

1. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n^\alpha$ converge.
2. Lorsque $\alpha = -3$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $N \geq n+1$,

$$\frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^N u_k \leq \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2}.$$

3. En déduire un équivalent simple quand $n \rightarrow +\infty$ du reste d'ordre n de $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Partie 2 : Cahin-caha traitons le cas $a = 1$

On suppose que $a = 1$.

- Déterminer la limite de $n^2 u_n$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- En déduire que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.
- Pour tout $x \in]-1; 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k.$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que f_n est dérivable sur $]-1; 1[$ et montrer que

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad x f_n'(x) = \sum_{k=0}^n k x^k.$$

- (b) En calculant la dérivée de f_n d'une autre façon, en déduire que

$$\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

- (c) Lorsque $\alpha = 1$, en déduire la somme totale de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.

Partie 3 : Par delà la géométrie

On suppose que $a > 1$.

- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^n) \geq 2^n$.
- En déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.

Partie 4 : Quand la série révèle sa vraie nature

On suppose que $0 < a < 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$.

- Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(1+a^n)$ converge. On note ℓ sa somme totale.
- Suivant les valeurs de α , en déduire la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- Si $\alpha \geq 0$, que peut-on en déduire ?
- Soit $\alpha < 0$. Déterminer un équivalent simple de u_n quand $n \rightarrow +\infty$ en fonction de ℓ .
- En déduire la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.
- Conclusion, représenter dans le plan l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{ (a, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge} \right\}.$$