

Correction du Devoir Maison 8

Polynômes, espaces vectoriels, séries

Du mardi 24 mars

Problème I - Polynômes

Partie 1 : Trouver la différence...

On appelle cotangente, notée cotan la fonction définie lorsque c'est possible par $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\cotan(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \pmod{\pi}.$$

Conclusion, le domaine de définition de cotan est donné par

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

2. La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et s'annule pour tout $x = 0 + k\pi$. Donc la fonction $1/\tan$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Notamment $1/\tan$ tout comme la fonction tan n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$ par exemple alors que d'après la question précédente, la fonction cotan l'est. Conclusion,

$$\text{les fonctions cotan et } 1/\tan \text{ ne sont pas égales en } \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

3. La fonction cotan est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \cotan'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)' = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0.$$

Donc notamment pour tout $x \in]0; \pi[\subset \mathcal{D}$, $\cotan'(x) < 0$. Donc la fonction cotan est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; \pi[$. De plus, cotan est continue sur $]0; \pi[$ car elle l'est sur \mathcal{D} . Donc par le théorème de la bijection, cotan définit une bijection de $I =]0; \pi[$ dans $J = \cotan(]0; \pi[)$ et de plus, on sait que

$$J = \cotan(]0; \pi[) = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} \cotan(x); \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \cotan(x) \right].$$

Or en π^- , cos tend vers -1 et sin vers 0^+ . Donc par quotient,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ x < \pi}} \cotan(x) = -1 \times +\infty = -\infty.$$

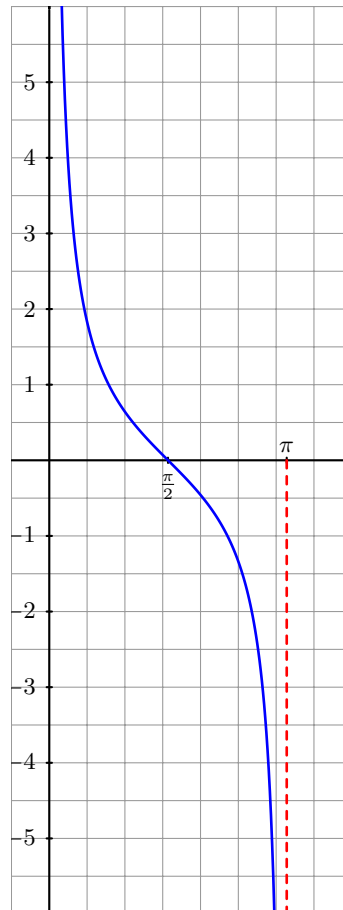
De même en 0^+ , cos tend vers 1 et sin vers 0^+ donc par quotient,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \cotan(x) = 1 \times +\infty = +\infty.$$

Donc $J = \mathbb{R}$. Conclusion,

$$\cotan \text{ définit une bijection de }]0; \pi[\text{ dans } \mathbb{R}.$$

On observe que $\cotan(\frac{\pi}{2}) = 0$. Ainsi, on obtient le graphe suivant :



L'objectif de ce problème est de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ en utilisant un résultat obtenu grâce à des polynômes.

Partie 2 : Une série limitée

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{n+1} > S_n.$$

Conclusion,

la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
 T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} \\
 &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)^2} \\
 &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1} < T_n.$$

Conclusion,

la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$T_n - S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n - S_n) = 0.$$

De plus, on a vu que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Ainsi, les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Or deux suites adjacentes convergent (et vers la même limite). Conclusion,

Les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent (et vers la même limite).

Partie 3 : Il faut prendre le problème par la racine

Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à déterminer tous les polynômes $R_n \in \mathbb{C}[X]$ solutions de l'équation

$$(E_n) \quad (X-1)R'_n = nR_n.$$

On note \mathcal{S}_n l'ensemble des solutions de (E_n) dans $\mathbb{C}[X]$.

7. On note les points suivants

- $\mathcal{S}_n \subset \mathbb{C}[X]$ par définition.
- Si $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$, alors $(X-1)P' = 0_{\mathbb{C}[X]} = nP$. Donc $0_{\mathbb{C}[X]} \in \mathcal{S}_n$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in \mathcal{S}_n^2$. Dès lors, on sait que

$$(X-1)P' = nP \quad \text{et} \quad (X-1)Q' = nQ$$

Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Alors, $R \in \mathbb{C}[X]$ et

$$\begin{aligned}
 (X-1)R' &= (X-1)(\lambda P + \mu Q)' \\
 &= (X-1)(\lambda P' + \mu Q') && \text{par linéarité de la dérivation des polynômes} \\
 &= \lambda(X-1)P' + \mu(X-1)Q' \\
 &= \lambda nP + \mu nQ && \text{car } P \in \mathcal{S}_n \text{ et } Q \in \mathcal{S}_n \\
 &= n(\lambda P + \mu Q) = nR.
 \end{aligned}$$

Donc $R \in \mathcal{S}_n$ et \mathcal{S}_n est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{S}_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}[X].}$$

8. Si $n = 0$, on a

$$(E_0) \quad (X - 1) R'_0 = 0_{\mathbb{C}[X]} \quad \Leftrightarrow \quad R'_0 = 0_{\mathbb{C}[X]} \quad \Leftrightarrow \quad R_0 \in \mathbb{C}_0[X].$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{S}_0 = \mathbb{C}_0[X].}$$

Soit $R_n \in \mathcal{S}_n$. On suppose R_n non constant.

9. Puisque R_n est non constant,

$$\boxed{\text{par le théorème de d'Alembert-Gauss, } R_n \text{ admet une racine } a \text{ dans } \mathbb{C}.}$$

On fixe $a \in \mathbb{C}$ une racine de R_n . On note $p \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité.

10. Puisque $R_n \in \mathcal{S}_n$, on a

$$nR_n = (X - 1) R'_n.$$

Donc en dérivant $p - 1$ fois cette égalité,

$$nR_n^{(p-1)} = ((X - 1) R'_n)^{(p-1)}.$$

Par la formule de Leibniz,

$$nR_n^{(p-1)} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} (X - 1)^{(k)} (R'_n)^{(p-1-k)}.$$

Or $(X - 1)^{(0)} = X + 1$, $(X - 1)^{(1)} = 1$ et pour tout $k \geq 2$, $(X - 1)^{(k)} = 0$. Donc si $p \geq 2$, $p - 1 \geq 1$ et alors

$$nR_n^{(p-1)} = \binom{p-1}{0} (X - 1) (R'_n)^{(p-1)} + \binom{p-1}{1} (R'_n)^{(p-2)} = (X - 1) R_n^{(p)} + (p - 1) R_n^{(p-1)}.$$

Si $p = 1$, on sait que $nR_n = (X - 1) R'_n$ donc l'égalité reste vraie. Conclusion,

$$\boxed{nR_n^{(p-1)} = (X - 1) R_n^{(p)} + (p - 1) R_n^{(p-1)}}.$$

11. On sait que p est la multiplicité de a . Donc par caractérisation avec les dérivées, on a $R_n^{(p-1)}(a) = 0$ et $R_n^{(p)}(a) \neq 0$. Donc en prenant $X = a$ dans le résultat de la question précédente,

$$0 = (a - 1) R_n^{(p)}(a) + 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - 1 = 0 \quad \text{car } R_n^{(p)}(a) \neq 0.$$

Conclusion,

$$a = 1.$$

Par le théorème de factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, on sait qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m$ (les racines de R_n), $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ (les multiplicités des racines) et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que

$$R_n = \lambda \prod_{k=1}^m (X - \alpha_k)^{n_k},$$

avec $\lambda \neq 0$ car R_n n'est pas constant par hypothèse. Or par la question précédente, R_n ne possède qu'une unique racine $a = 1$. Donc $m = 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ (la multiplicité de 1) tel que

$$\boxed{R_n = \lambda (X - 1)^p.}$$

12. En injectant l'expression précédente dans l'équation (E_n) , on obtient

$$\begin{aligned} n \lambda (X - 1)^p &= (X - 1) p \lambda (X - 1)^{p-1} && \text{car } p \geq 1 \\ \Leftrightarrow n \lambda (X - 1)^p &= p \lambda (X - 1)^p \end{aligned}$$

Par unicité du coefficient dominant $n \lambda = p \lambda$. Or $\lambda \neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{n = p.}$$

13. Si R_n n'est pas constant, alors par les questions précédentes, $\exists \lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $R_n = \lambda (X - 1)^n$ et donc $R_n \in \text{Vect}((X - 1)^n)$. Supposons $R_n \in \mathcal{S}_n$ constant, $R_n = c$ avec $c \in \mathbb{C}$. Alors $R'_n = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Dès lors,

$$(E_n) \quad nR_n = (X - 1) R'_n \quad \Leftrightarrow \quad nc = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0 \quad \text{car } n \neq 0.$$

Donc $R_n = 0 \in \text{Vect}((X - 1)^n)$. Donc

$$\mathcal{S}_n \subset \text{Vect}((X - 1)^n).$$

Réciproquement, soit $R_n \in \text{Vect}((X - 1)^n)$. Dès lors,

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \quad R_n = \lambda (X - 1)^n.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} (X - 1) R'_n &= (X - 1) n \lambda (X - 1)^{n-1} && \text{car } n \geq 1 \\ &= n \lambda (X - 1)^n \\ &= nR_n. \end{aligned}$$

Donc $R_n \in \mathcal{S}_n$ et ainsi,

$$\text{Vect}((X - 1)^n) \subset \mathcal{S}_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{S}_n = \text{Vect}((X - 1)^n).}$$

Partie 4 : Découper Q_n en petits morceaux pour mieux l'apprécier

On fixe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et pour tout $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, on note $\omega_k = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

14. Soit $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_{n-k} &= \cotan\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right) \\ &= \cotan\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right) \\ &= \frac{\cos\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right)} \\ &= \frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\ &= -\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\omega_{n-k} = -\omega_k.}$$

On pose $R_n = (X - 1)^n$ et $Q_n = R_n(X + 2) - R_n(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n$.

15. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$Q_2 = (X + 1)^2 - (X - 1)^2 = X^2 + 2X + 1 - X^2 + 2X - 1 = 4X.$$

Aussi,

$$Q_3 = (X + 1)^3 - (X - 1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - (X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = 6X^2 + 2.$$

Et enfin,

$$\begin{aligned} Q_4 &= (X + 1)^4 - (X - 1)^4 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 - (X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1) \\ &= 8X^3 + 8X. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{Q_2 = 4X, \quad Q_3 = 6X^2 + 2, \quad Q_4 = 8X^3 + 8X.}$$

16. Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ tel que $n = 2p$. Dès lors,

$$\begin{aligned} Q_n(-X) &= (-X + 1)^n - (-X - 1)^n = (-X + 1)^{2p} - (-X - 1)^{2p} \\ &= (X - 1)^{2p} - (X + 1)^{2p} && \text{car } (-1)^{2p} = 1 \\ &= -Q_n. \end{aligned}$$

Donc dans ce cas, Q_n est impair.

Si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ tel que $n = 2p + 1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} Q_n(-X) &= (-X + 1)^n - (-X - 1)^n = (-X + 1)^{2p+1} - (-X - 1)^{2p+1} \\ &= -(X - 1)^{2p+1} + (X + 1)^{2p+1} && \text{car } (-1)^{2p+1} = -1 \\ &= Q_n. \end{aligned}$$

Donc dans ce cas, Q_n est pair.

Conclusion,

$$\boxed{\text{Le polynôme } Q_n \text{ est de même parité que } n + 1.}$$

17. Par la formule du binôme de Newton, on a

$$(X + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k.$$

De même $(X - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k}$. D'où,

$$Q_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1 - (-1)^{n-k}).$$

Si $k = n$, on a $1 - (-1)^{n-k} = 1 - 1 = 0$. Si $k = n - 1$, on a $1 - (-1)^{n-k} = 2$. Donc

$$Q_n = \binom{n}{n-1} 2X^{n-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} X^k (1 - (-1)^{n-k})}_{=A} \quad \text{car } n \geq 2.$$

Or $\deg(A) \leq n - 2$. Conclusion,

$$\boxed{\deg(Q_n) = n - 1 \quad \text{et son coefficient dominant est } 2 \binom{n}{n-1} = 2n.}$$

18. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences entre complexes suivantes :

$$\begin{aligned} (z+1)^n - (z-1)^n = 0 &\Leftrightarrow (z+1)^n = (z-1)^n \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad z+1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}} (z-1) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad z \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = - \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1\right). \end{aligned}$$

Si $k = 0$, $z \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = - \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1\right) \Leftrightarrow 0 = -2$ impossible. Donc $k \neq 0$ et $1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 0$. Dans ce cas,

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \quad z = -\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}}.$$

Or par factorisation par l'angle moitié,

$$\begin{aligned} -\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} &= -\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{-e^{i\frac{k\pi}{n}} e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}} \\ &= \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\ &= -i \omega_k. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \{-i\omega_k \mid k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket\}}.$$

19. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned} z \text{ racine de } Q &\Leftrightarrow Q(z) = 0_{\mathbb{C}} \\ &\Leftrightarrow (z+1)^n - (z-1)^n = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \{-i\omega_k \mid k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket\}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $-i\omega_k$ est une racine de Q . Montrons qu'elles sont distinctes. Soit $(k, l) \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket^2$, tel que $-i\omega_k = -i\omega_l$. Alors, $\omega_k = \omega_l$ i.e.

$$\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cotan\left(\frac{l\pi}{n}\right).$$

Or $\frac{k\pi}{n} \in]0; \pi[$ et $\frac{l\pi}{n} \in]0; \pi[$ car $(k, l) \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket^2$ et par la question 3. des préliminaires cotan définit une bijection de $]0; \pi[$ dans \mathbb{R} . Notamment cotan est injective sur $]0; \pi[$ donc

$$\frac{k\pi}{n} = \frac{l\pi}{n} \quad \Leftrightarrow \quad k = l.$$

Par contraposée, $k \neq l$ implique $-i\omega_k \neq -i\omega_l$ et les racines trouvées sont distinctes. Conclusion,

$$\boxed{Q_n \text{ possède au moins } n-1 \text{ racines distinctes : } -i\omega_1, -i\omega_2, \dots, -i\omega_{n-1}.$$

20. Par la question précédente, $-i\omega_1, -i\omega_2, \dots, -i\omega_{n-1}$ sont $n-1$ racines distinctes de Q_n et par la question 17. $\deg(Q_n) = n-1$. Donc $-i\omega_1, -i\omega_2, \dots, -i\omega_{n-1}$ sont exactement les $n-1$ racines de Q_n . Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$Q_n = \lambda \prod_{k=1}^{n-1} (X + i\omega_k)$$

Or toujours par la question 17. le coefficient dominant de Q_n est $2n$ donc $\lambda = 2n$. Conclusion,

$$\boxed{Q_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} (X + i\omega_k).$$

21. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n = 2m + 1$. Il faut rassembler les racines conjuguées l'une de l'autre. Or puisque $\omega_k = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \in \mathbb{R}$, on a $\overline{-i\omega_k} = i\omega_k = i(-\omega_{n-k})$ d'après la question 14.. Donc

$$\overline{-i\omega_k} = -i\omega_{n-k}.$$

Ainsi,

$$Q_n = Q_{2m+1} = 2n \prod_{k=1}^{2m} (X + i\omega_k) = 2n \prod_{k=1}^m (X + i\omega_k) \prod_{k=m+1}^{2m} (X + i\omega_k).$$

Posons $\tilde{k} = 2m + 1 - k$ dans le second produit,

$$\begin{aligned} Q_n &= 2n \prod_{k=1}^m (X + i\omega_k) \prod_{k=1}^m (X + i\omega_{2m+1-k}) \\ &= 2n \prod_{k=1}^m [(X + i\omega_k)(X + i\omega_{n-k})] \\ &= 2n \prod_{k=1}^m [(X + i\omega_k)(X + \overline{i\omega_k})] \\ &= 2n \prod_{k=1}^m [X^2 + 2\operatorname{Re}(i\omega_k)X + |i\omega_k|^2] \\ &= 2n \prod_{k=1}^m \left[X^2 + \left| \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right| \right]. \end{aligned}$$

Or si $1 \leq k \leq m$ alors $0 < \frac{k\pi}{n} = \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{\pi}{2}$. donc $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$ et donc $\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$. Conclusion, dans $\mathbb{R}[X]$,

$$Q_{2m+1} = 2(2m+1) \prod_{k=1}^m \left(X^2 + \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right).$$

Partie 5 : P_n n'est qu'un déguisement de Q_n

On considère toujours $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose $P_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^k$.

22. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$P_2 = \sum_{k=0}^2 \binom{5}{2k} X^k = 1 + \binom{5}{2} X + \binom{5}{4} X^2 = 1 + 10X + 5X^2.$$

De même,

$$P_3 = \sum_{k=0}^3 \binom{7}{2k} X^k = 1 + \binom{7}{2} X + \binom{7}{4} X^2 + \binom{7}{6} X^3 = 1$$

Or par le triangle de Pascal, on a les coefficients suivants à l'ordre 7 : 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. D'où

$$P_3 = 1 + 21X + 35X^2 + 7X^3.$$

Conclusion,

$$P_2 = 5X^2 + 10X + 1, \quad P_3 = 7X^3 + 35X^2 + 21X + 1.$$

23. (a) Soit $t \in \mathbb{C}$. On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^{2k} t^{2n-2k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1} t^{2n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^{2k} t^{2n-2k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1} t^{2n-(2k+1)+1}. \end{aligned}$$

Posons pour tout $k \in \llbracket 0; 2n+1 \rrbracket$, $u_k = \binom{2n+1}{k} X^k t^{2n-k+1}$. Dès lors,

$$A = \sum_{k=0}^n u_{2k} + \sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{\substack{0 \leq p \leq 2n+1 \\ p \text{ pair}}} u_p + \sum_{\substack{0 \leq p \leq 2n+1 \\ p \text{ impair}}} u_p = \sum_{p=0}^{2n+1} u_p.$$

Ainsi, par la formule du binôme de Newton,

$$A = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k t^{2n-k+1} = (X+t)^{2n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A = (X+t)^{2n+1}.$$

(b) Par définition, on a

$$Q_{2n+1}(X) = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1}.$$

Donc par la question précédente en prenant $t = 1$,

$$(X+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^{2k} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1}.$$

De même, en prenant $t = -1$,

$$\begin{aligned} (X-1)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^{2k} (-1)^{2n-2k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1} (-1)^{2n-2k} \\ &= - \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^{2k} + \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} X^{2k+1}. \end{aligned}$$

Donc en faisant la différence de ces deux expressions, les termes impairs disparaissent,

$$Q_{2n+1}(X) = 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^{2k} + 0 = 2P_n(X^2).$$

Conclusion,

$$\boxed{Q_{2n+1}(X) = 2P_n(X^2).$$

24. On sait que pour tout $k \in \llbracket 1; (2n+1) - 1 \rrbracket = \llbracket 1; 2n \rrbracket$, $-i \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ est racine de Q_{2n+1} donc

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket, \quad 0_{\mathbb{C}} &= Q_{2n+1}\left(-i \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \\ &= 2P_n\left((-i)^2 \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \\ &= 2P_n\left(-\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right). \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $-\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ est racine de P_n . Montrons que ces racines sont distinctes. Soit $(k, l) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que

$$-\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\cotan^2\left(\frac{l\pi}{2n+1}\right).$$

Alors,

$$\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \cotan^2\left(\frac{l\pi}{2n+1}\right).$$

Or $0 < \frac{k\pi}{2n+1} \leq \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$. De même $0 < \frac{l\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$. Donc $\cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > 0$ et $\cotan\left(\frac{l\pi}{2n+1}\right) > 0$. Ainsi,

$$\cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \cotan\left(\frac{l\pi}{2n+1}\right).$$

Or par la question 3. des préliminaires, \cotan est bijective donc injective sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ donc

$$\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{l\pi}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad k = l.$$

Donc $-\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ forment n racines distinctes de P_n . Or $\deg(P_n) = n$ (car $\binom{2n+1}{2n} \neq 0$). Donc P_n possède exactement n racines (comptées avec multiplicité) dans \mathbb{C} . Donc

$$-\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right), k \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ forment les } n \text{ racines de } P_n \text{ qui n'en possède pas d'autre.}$$

25. Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ scindé dont les n racines sont notées x_1, \dots, x_n . Posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $a_n \neq 0$. Alors,

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \quad \text{et} \quad x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

26. Puisque $x_k = -\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ sont les racines de P_n et que son coefficient d'ordre n vaut $a_n = \binom{2n+1}{2n}$ et celui d'ordre $n-1$ $a_{n-1} = \binom{2n+1}{2n-2}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n -\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) &= -\frac{\binom{2n+1}{2n-2}}{\binom{2n+1}{2n}} = -\frac{\frac{(2n+1)!}{(2n-2)!(2n+1-(2n-2))!}}{\frac{(2n+1)!}{(2n)!(2n+1-2n)!}} \\ &= -\frac{\frac{(2n+1)!}{(2n-2)!3!}}{\frac{(2n+1)!}{(2n)!}} \\ &= -\frac{(2n)!}{(2n-2)!6} \\ &= -\frac{2n(2n+1)}{6} \\ &= -\frac{n(2n+1)}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Partie 6 : Conséquence constructive, conclusion convaincante et même consécration complète

On admet que pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.
(ce qui se démontre par une simple étude de fonction).

27. Soit $f : x \mapsto x - \sin(x)$. La fonction f est définie et même dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$f'(x) = 1 - \cos(x).$$

Or pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) < 1$ donc $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$. Ainsi

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad f(x) > \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

D'où $x - \sin(x) > 0$ i.e. $x > \sin(x)$. De même, posons $g : x \mapsto \tan(x) - x$. La fonction g est définie et même dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) > 0.$$

Donc la fonction g est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et donc

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad g(x) > \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad \sin(x) < x < \tan(x).}$$

28. Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Par la décroissance de la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ sur \mathbb{R}_+^* , on a

$$0 < \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \cotan^2(x) + 1.$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{\forall x \in]0; \frac{\pi}{2}[, \quad \cotan^2(x) \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cotan^2(x).}$$

29. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Posons $x = \frac{k\pi}{2n+1}$. Alors $0 < x < \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$. Donc par la question précédente,

$$\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq 1 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Ou encore, puisque $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} > 0$,

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(1 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).}$$

30. En sommant entre 1 et n , on obtient que

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sum_{k=1}^n \left(1 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

Or par la question 26. $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$. Donc

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right).$$

Or

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{n(2n-1)}{3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2 (2n^2)}{4n^2 \times 3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

D'autre part,

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{4n^2} \left(\frac{2n^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Donc par le théorème d'encadrement pour les équivalents,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}.$$

31. Deux équivalents ayant la même limite, on conclut finalement que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Après tant d'efforts, comment ne pas être émerveillé par la beauté des mathématiques...

Problème II - Espace Vectoriel

Pour E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on pose $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0_{\mathbb{R}}\}$.

Partie 1 : La base, c'est s'adapter.

On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}_4[X]$ et on pose $\mathcal{B} = (1, X, X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1))$.

1. Par le cours, on sait que

$$\mathcal{B}_{can} = (1, X, X^2, X^3, X^4) \text{ est la base canonique de } E = \mathbb{R}_4[X].$$

2. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E . On a

- $F \subset E$ par définition.
- Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, alors en particulier, $P(0) = P(1) = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in F^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Puisque $P \in F$, on a $P(0) = P(1) = 0$. De même $Q \in F$ donc $Q(0) = Q(1) = 0$. Ainsi,

$$R(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0 \quad \text{et} \quad R(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0.$$

Donc $R \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

3. *Méthode 1.* Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \in \mathbb{R}_4[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 & P \in \text{Vect}(\mathcal{B}) \\
 \Leftrightarrow & \exists (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, P = x + yX + zX(X-1) + tX^2(X-1) + uX^3(X-1) \\
 \Leftrightarrow & \exists (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, P = x + (y-z)X + (z-t)X^2 + (t-u)X^3 + uX^4 \\
 \Leftrightarrow & \exists (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, \begin{cases} a_0 = x \\ a_1 = y - z \\ a_2 = z - t \\ a_3 = t - u \\ a_4 = u \end{cases} \quad \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\
 \Leftrightarrow & \exists (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, \begin{cases} x = a_0 \\ y = a_1 + z = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ z = a_2 + t = a_2 + a_3 + a_4 \\ t = a_3 + u = a_3 + a_4 \\ u = a_4 \end{cases} \quad \text{l'existence est toujours vraie.}
 \end{aligned}$$

Donc pour tout $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $P \in \text{Vect}(\mathcal{B})$ et donc $\mathbb{R}_4[X] \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$ et réciproquement puisque la famille \mathcal{B} est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$, on a $\text{Vect}(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}_4[X]$. Donc

$$\text{Vect}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}_4[X].$$

Méthode 2. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. On a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect}(1, X, X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1)) \\
 &= \text{Vect}(1, X, X^2 - X, X^3 - X^2, X^4 - X^3) \\
 &= \text{Vect}(1, X, X^2, X^3 - X^2, X^4 - X^3) && C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\
 &= \text{Vect}(1, X, X^2, X^3, X^4 - X^3) && C_4 \leftarrow C_4 + C_3 \\
 &= \text{Vect}(1, X, X^2, X^3, X^4) && C_5 \leftarrow C_5 + C_4 \\
 &= \mathbb{R}_4[X] \quad \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathbb{R}_4[X].
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est génératrice de } E.}$$

4. Montrons que \mathcal{B} est une base de E . On sait déjà par la question précédente que \mathcal{B} est génératrice dans E . De plus, \mathcal{B} est une famille de polynômes de degrés distincts. Donc \mathcal{B} est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E.}$$

5. Soit $\mathcal{B}_F = (X(X-1), X^2(X-1), X^3(X-1))$. On observe les points suivants :

- \mathcal{B}_F est une sous-famille de \mathcal{B} . Or \mathcal{B} est libre, donc \mathcal{B}_F est libre.
- Montrons que \mathcal{B}_F engendrent F i.e. $\text{Vect}(\mathcal{B}_F) = F$. Soit $P \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 P \in F &\Leftrightarrow F(0) = F(1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 0 \text{ et } 1 \text{ sont des racines distinctes de } P \\
 &\Leftrightarrow X(X-1) \text{ divise } P \\
 &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = X(X-1)Q.
 \end{aligned}$$

Or $\deg(P) \leq 4$ donc $\deg(Q) \leq 2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 P \in F &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad P = X(X-1)Q \\
 &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad P = X(X-1)(aX^2 + bX + c) \\
 &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad P = aX^3(X-1) + bX^2(X-1) + cX(X-1) \\
 &\Leftrightarrow P \in \text{Vect}(\mathcal{B}_F).
 \end{aligned}$$

Donc on a bien $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_F)$ et \mathcal{B}_F est génératrice dans F .

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B}_F \text{ est une base de } F.}$$

6. Posons $\mathcal{B}_1 = (1, X)$. On sait que \mathcal{B}_1 est la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. On a donc les points suivants :

- \mathcal{B}_1 est une base de $\mathbb{R}_1[X]$,
- \mathcal{B}_F est une base de F ,
- de plus, $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_F) = \mathcal{B}$, donc est une base de E .

Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \oplus F = E.}$$

Partie 2 : La division unifie le tout !

Pour E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on pose $F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = 0_{\mathbb{R}}\}$.

7. Montrons que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe. Montrons que $F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0_E\}$. Soit $P \in F \cap \mathbb{R}_1[X]$. Alors, $P \in \mathbb{R}_1[X]$ i.e. $\deg(P) \leq 1$. Or $P \in F$ donc 0 et 1 sont racines de P . Donc P admet deux racines distincts ce qui est davantage que son degré donc nécessairement $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi,

$$F \cap \mathbb{R}_1[X] \subset \{0_E\}.$$

Réciproquement, F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc $0_E \in F$ et $0_E \in \mathbb{R}_1[X]$ et donc $\{0_E\} \subset F \cap \mathbb{R}_1[X]$. D'où

$$F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{0_E\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{F \text{ et } \mathbb{R}_1[X] \text{ sont en somme directe.}}$$

8. Soit $P \in E$. Par le théorème de la division euclidienne, il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$P = X(X-1)Q + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(X(X-1)) = 2.$$

Donc $\deg(R) \leq 1$ i.e. $R \in \mathbb{R}_1[X]$. Donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = aX + b$. En évaluant en 0 et 1, on a

$$\begin{cases} P(0) = 0 + R(0) = b \\ P(1) = 0 + R(1) = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = P(0) \\ a = P(1) - b = P(1) - P(0) \end{cases}$$

Conclusion, le reste R de la division euclidienne de P par $X(X-1)$ est donné par

$$\boxed{R = (P(1) - P(0))X + P(0).}$$

9. Montrons que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$. Il nous don démontrer les deux points suivants :

- (i) F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe,
 (ii) $F + \mathbb{R}_1[X] = E$.

Le point (i) est vrai par la question 7. Montrons le point (ii). Puisque F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de E , on a $F + \mathbb{R}_1[X] \subset E$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par la question précédente, il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ tel que

$$P = X(X - 1)Q + R.$$

Posons $P_F = X(X - 1)Q$ et $P_1 = R$. Alors,

- $P_F(0) = P_F(1) = 0$. Donc $P_F \in F$,
- $P_1 = R \in \mathbb{R}_1[X]$ d'après la question précédente,
- $P_F + P_1 = P$.

D'où, $P \in F + \mathbb{R}_1[X]$. Ceci étant vrai pour $P \in \mathbb{R}[X]$ quelconque, on en déduit que

$$E \subset F + \mathbb{R}_1[X].$$

Donc

$$E = F + \mathbb{R}_1[X].$$

Conclusion, par (i) et (ii), on en déduit que

$$\boxed{F \text{ et } \mathbb{R}_1[X] \text{ sont supplémentaires dans } E \text{ i.e. } F \oplus \mathbb{R}_1[X] = E.}$$

NB1 : ce résultat généralise celui de la partie précédente car nous l'avons fait dans $\mathbb{R}[X]$ mais on peut appliquer exactement le même raisonnement dans $\mathbb{R}_n[X]$.

NB2 : le théorème de la division euclidienne garantissant également l'unicité, il était possible de l'utiliser aussi pour montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ étaient en somme directe en revenant à la définition du caractère directe (et non la propriété avec l'intersection).

Exercice III - Séries numériques

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer les valeurs de a et α pour lesquelles la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3) \cdots (1+a^n)}.$$

Partie 1 : Le cas nul n'est pas si mauvais

On suppose dans cette partie que $a = 0$. Dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n^\alpha.$$

1. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n^\alpha$ est une série de Riemann d'exposant $-\alpha$. Donc

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} n^\alpha \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < -1.}$$

2. On suppose que $\alpha = -3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geq n+1$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Par le théorème de comparaison série-intégrale, puisque $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^3} dt &\leq \sum_{k=n+1}^N u_k \leq \int_n^N \frac{1}{t^3} dt \\ \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_{n+1}^{N+1} &\leq \sum_{k=n+1}^N u_k \leq \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_n^N \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} &\leq \sum_{k=n+1}^N u_k \leq \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall N \geq n+1, \quad \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^N u_k \leq \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2}.$$

3. Puisque $\alpha = -3 < -2$, on sait par la question 1. que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge. Donc son reste d'ordre n existe i.e. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N u_k$ existe. Donc par passage à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ dans la question précédente :

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2n^2}$$

On sait que $n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$. Donc par élévation à la puissance -2 , on obtient que $\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Ainsi,

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Donc par le théorème d'encadrement des équivalents, on en conclut que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Partie 2 : Cahin-caha traitons le cas $a = 1$

On suppose que $a = 1$. Dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^\alpha}{(1+1)(1+1^2)\cdots(1+1^n)} = \frac{n^\alpha}{2 \times 2 \times \cdots \times 2} = \frac{n^\alpha}{2^n}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 u_n = \frac{n^{\alpha+2}}{2^n}$. Donc par croissance comparée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0.$$

5. Par la question précédente, on en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq n^2 u_n \leq 1$ i.e. $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$. Or $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}$$

6. Pour tout $x \in]-1; 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k.$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale donc notamment sur $]-1; 1[$. De plus,

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad x f_n'(x) = x \sum_{k=1}^n k x^{k-1} = \sum_{k=1}^n k x^k = \sum_{k=0}^n k x^k - 0.$$

Conclusion, f_n est dérivable sur $]-1; 1[$ et

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad x f_n'(x) = \sum_{k=0}^n k x^k.$$

(b) Soit $x \in]-1; 1[$. On observe que $f_n(x)$ est une somme géométrique de raison $x \neq 1$. Donc

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est dérivable sur $]-1; 1[$ et on obtient que

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1; 1[, \quad f_n'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1-1)x^{n+1} + 1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-1; 1[$,

$$\sum_{k=0}^n k x^k = x f_n'(x) = \frac{x(n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(1-x)^2}.$$

Notamment, pour $x = \frac{1}{2} \in]-1; 1[$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + 1 \right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2^{n+2}} (n - 2n - 2 + 2^{n+1})}{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Formule que l'on peut vérifier au rang $n = 0$, $n = 1$ ou $n = 2$.

(c) On suppose que $\alpha = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{2^n}$. Donc par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Or par croissance comparée, $\frac{n+2}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. On retrouve donc bien que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{n+2}{2^n} = 2.$$

Partie 3 : Par delà la géométrie

On suppose que $a > 1$.

7. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $1 + a^k \geq 2$. Donc par produit, comme tous les termes sont positifs, on obtient directement que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n) \geq 2^n.$$

8. Par la question précédente, comme $n^\alpha > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{n^\alpha}{2^n}.$$

Or par la partie précédente, on a vu que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^\alpha}{2^n}$ converge. Donc par le théorème de comparaison,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}$$

Partie 4 : Quand la série révèle sa vraie nature

On suppose que $0 < a < 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$.

9. Puisque $a \in]0; 1[$, on a $a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc

$$\ln(1+a^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a^n.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n \geq 0$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(1+a^n)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a^n$ sont de même nature. Or la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a^n$ converge en tant que série géométrique de raison $a \in]-1; 1[$. Conclusion,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(1+a^n) \text{ converge.}$$

On note ℓ sa somme totale.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\frac{n^\alpha}{\prod_{k=1}^n (1+a^k)}\right) = \alpha \ln(n) - \sum_{k=1}^n \ln(1+a^k).$$

On sait par la question précédente que $\sum_{k=1}^n \ln(1+a^k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. On en déduit donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ -\ell & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{v_n}$. Par composée, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ e^{-\ell} & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

11. Si $\alpha \geq 0$, par la question précédente, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 (car $e^{-\ell} > 0$ pour $\alpha = 0$ et sinon elle diverge vers $+\infty$). Dans ce cas,

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge grossièrement.

12. Soit $\alpha < 0$. On a vu que

$$\sum_{k=1}^n \ln(1 + a^k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ell + o(1).$$

Donc

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \alpha \ln(n) + \ell + o(1).$$

Ainsi,

$$u_n = e^{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\alpha \ln(n) + \ell + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n^\alpha e^\ell e^{o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{e^\ell}{n^{-\alpha}} (1 + o(1)).$$

Conclusion,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^\ell}{n^{-\alpha}}.$$

13. Par la question précédente, et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e^\ell}{n^{-\alpha}} > 0$, on en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^\ell}{n^{-\alpha}}$ sont de même nature. Or e^ℓ étant une constante non nulle, on observe que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^\ell}{n^{-\alpha}}$ est une série de Riemann d'exposant $-\alpha$. Ainsi,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{e^\ell}{n^{-\alpha}} \text{ converge} \Leftrightarrow -\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < -1.$$

Conclusion,

Si $\alpha < -1$ alors, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge et si $\alpha \in [-1; 0[$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge (mais pas grossièrement).

14. Par les parties précédentes, on sait que

- si $a = 0$, alors la série converge si et seulement si $\alpha < -1$,
- si $0 < a < 1$, alors la série converge si et seulement si $\alpha < -1$,
- si $a = 1$, alors la série converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
- si $a > 1$, alors la série converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Conclusion, l'ensemble \mathcal{S} est donnée par la partie rouge ci-dessous :

