Devoir Maison 9
Applications linéaires et probabilités

A faire pour le mardi 21 avril

Problème I - Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel. On cherche dans ce problème à étudier les endomorphismes u de E vérifiant

$$u^3 = u^2 \qquad (\bigstar)$$

Partie 1 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On suppose maintenant que $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. La fonction f est-elle injective ? Préciser le rang de f. La fonction f est-elle surjective ?
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Exprimer f^2 puis f^3 en fonction de puissances de A.
6. Montrer que f vérifie $(\bigstar)$.

On pose $F_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $G_1 = \mathrm{Ker}(f^2)$.

7. Déterminer une base de F_1 et une base de G_1.
8. Montrer que F_1 et G_1 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Partie 2 : Un exemple dans $\mathbb{R}_2[X]$

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\varphi(P) = P - (X+1)P' + (X^2-1)P''$. On note $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$. On pose $F_2 = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$ et $G_2 = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$.

9. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
10. (a) Déterminer l'image des vecteurs de $\mathscr{C}$ par φ.
    (b) En déduire l'image des vecteurs de $\mathscr{C}$ par φ^2.
11. En déduire que $\varphi^2 = \varphi$ puis que φ vérifie $(\bigstar)$.
12. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et en déduire le rang de φ.
13. (a) Calculer $\varphi(X+1)$.
    (b) A l'aide de la question précédente, en déduire $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
14. Déterminer F_2.
15. Montrer que F_2 et G_2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Partie 3 : Etude générale

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 = u^2$. On pose $F = \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$.

16. Montrer que G est stable par u i.e. pour tout $x \in G$, $u(x) \in G$.
17. Montrer que F est aussi stable par u.
18. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \subset G$.
19. Montrer que F et G sont en somme directe.
20. (a) Déterminer tous les automorphismes de E solutions de ($\bigstar$).
    (b) Préciser dans ce cas F et G.

On veut montrer par deux méthodes que F et G sont supplémentaires dans E.

21. **Méthode 1, en dimension finie.** On suppose dans cette question que E est de dimension finie.
    (a) Montrer que $\operatorname{Im}\left(u^2\right) \subset F$.
    (b) A l'aide de la question 19., en déduire que $\dim(F+G) \geqslant \operatorname{rg}\left(u^2\right) + \dim\left(\operatorname{Ker}\left(u^2\right)\right)$.
    (c) Conclure que F et G sont supplémentaires dans E.
22. **Méthode 2, en dimension éventuellement infinie.** Soit $x \in E$. On pose $x_F = u^2(x)$ et $x_G = x - u^2(x)$.
    (a) Justifier que $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
    (b) En déduire à nouveau que F et G sont supplémentaires dans E.

Partie 4 : Cas de la dimension 3

On suppose dans cette partie que $\dim(E) = 3$. On cherche à construire une base $\mathscr{B}$ adaptée à u.

23. On suppose que $\dim(F) = 3$. Préciser u dans ce cas.
24. On suppose que $\dim(F) = 2$.
    (a) Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(u)) \in \{0; 1\}$.
    (b) Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = 1$.
    (c) En déduire que $G = \operatorname{Ker}(u)$.
    (d) Justifier qu'il existe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E telle que
$$u(e_1) = e_1,\ u(e_2) = e_2 \text{ et } u(e_3) = 0_E.$$
25. On suppose que $\dim(F) = 1$. Soit $v : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$.
    (a) Justifier que v est bien défini et constitue bien un endomorphisme de G.
    (b) Préciser v^2 puis justifier que $\operatorname{rg}(v) \in \{0, 1\}$.
    (c) Si $\operatorname{rg}(v) = 0$, justifier qu'il existe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E telle que
$$u(e_1) = e_1,\ u(e_2) = 0_E \text{ et } u(e_3) = 0_E.$$
    (d) Si $\operatorname{rg}(v) = 1$,
        (i) Montrer qu'il existe $(e_2, e_3) \in \operatorname{Im}(v) \times G$ tel que $e_2 \neq 0_E$ et $v(e_3) = e_2$.

(ii) Montrer que $v(e_2) = 0_E$.

(iii) En déduire que (e_2, e_3) est une base de G.

(e) Justifier qu'il existe $e_1 \in E$ tel que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de E et tel que

$$u(e_1) = e_1,\ u(e_2) = 0_E \text{ et } u(e_3) = e_2.$$

26. On suppose enfin que $\dim(F) = 0$.

(a) Préciser u^2.

(b) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

(c) En déduire que $\mathrm{rg}(u) \in \{0; 1\}$.

(d) On suppose $u \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

(i) Justifier qu'il existe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) \in (\mathrm{Im}(u) \setminus \{0_E\}) \times (\mathrm{Ker}(u) \setminus \mathrm{Im}(u)) \times E$ telle que

$$u(e_1) = 0_E,\ u(e_2) = 0_E \text{ et } u(e_3) = e_1.$$

On pourra parler du supplémentaire de Im(u) dans Ker(u) pour construire e_2.

(ii) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.

27. Préciser parmi les questions 23., 24.d, 25.c, 25.e, 26.d à quelle situation correspond f de la partie 1 ?

28. Même question pour φ de la partie 2.

Problème II - Variables aléatoires

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$. On considère une urne contenant N boules rouges et N boules vertes. On fixe $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de ce problème. On effectue successivement des tirages uniformes dans l'urne avec le protocole suivant :

- Si l'on pioche une boule rouge, on la peint en vert et on la replace dans l'urne.
- Si l'on pioche une boule verte, on la remet dans l'urne sans changer sa couleur.

Au tirage $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire retournant 1 si la boule est rouge et 0 sinon.

Partie 1 : Lois initiales

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu une boule rouge au second tirage sachant que l'on a obtenu une boule rouge au premier tirage.
3. Déterminer la loi de X_2.
4. Les évènements $(X_1 = 1)$ et $(X_2 = 1)$ sont-ils indépendants ?
5. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu une boule verte au premier tirage sachant que l'on a obtenu une boule rouge au second tirage.

Partie 2 : Autour de la somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On fixe $n \in [\![1; N-1]\!]$.

6. Préciser $S_n(\Omega)$ l'univers image de S_n.
7. Enoncer en français l'évènement $(S_n = 0)$, l'écrire comme une intersection d'évènements de X_i puis calculer sa probabilité.
8. Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid S_n = k)$ en fonction de N et k.
9. Soit $i \in [\![0; n]\!]$. Préciser pour tout $j \in [\![0; n+1]\!]$, $\mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i)$.
10. En déduire que
$$\forall k \in [\![1; n]\!], \qquad \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{2N}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \frac{N+k}{2N}\mathbb{P}(S_n = k).$$
On admet/vérifie facilement que la formule reste vraie pour $k = 0$ ou $k = n+1$.

Partie 3 : Comportement asymptotique de l'espérance

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(S_n = k)$.
Le nombre u_n correspond au nombre moyen de boules rouges obtenues durant n tirages.

11. Vérifier que pour tout $n \in [\![1; N-1]\!]$,
$$\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(N-k)}{2N}\mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(N+k)}{2N}\mathbb{P}(S_n = k).$$
12. Montrer que pour tout $n \in [\![1; N-1]\!]$, $u_{n+1} = \frac{2N-1}{2N}u_n + \frac{1}{2}$.
On admet que cette formule reste vraie pour $n \geqslant N$.
13. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de u_n en fonction de n.
14. Déterminer, si elle existe, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter.