

Correction du Devoir Maison 9

Applications linéaires et probabilités

Du mardi 21 avril

Soit E un espace vectoriel. On cherche dans ce problème à étudier les endomorphismes u de E vérifiant

$$(\star) \quad u^3 = u^2$$

Partie 1 : Un exemple dans \mathbb{R}^3

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $X \mapsto AX$.

1. Soient $X \in \mathbb{R}^3$. Puisque $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $AX \in \mathbb{R}^3$. Donc pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, $f(X) \in \mathbb{R}^3$ et donc f va bien de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(X, Y) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Posons $Z = \lambda X + \mu Y$. On a

$$f(\lambda X + \mu Y) = f(Z) = AZ = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda AX + \mu AY = \lambda f(X) + \mu f(Y).$$

Donc f est linéaire. Conclusion,

L'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3 : f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

On suppose maintenant que $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(X) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow AX = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - y \\ 3x + y - 4z \\ x - y \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + y - 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x + x - 4z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = z. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \right\} = \text{Vect} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}_{\mathcal{B}_K}.$$

La famille \mathcal{B}_K engendre $\text{Ker}(f)$ et est libre car $(1, 1, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Conclusion,

$$\mathcal{B}_K = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Ker}(f).$$

3. Par la question précédente, $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Donc

$$f \text{ n'est pas injective.}$$

De plus, toujours par la question précédente, $\dim(\text{Ker}(f)) = \text{Card} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1$ i.e. $\text{Ker}(f)$ est une droite vectorielle. Donc par le théorème du rang,

$$\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.$$

Enfin, puisque $\text{rg}(f) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que

$$f \text{ n'est pas surjective.}$$

4. La famille $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de \mathbb{R}^3 (en tant que base canonique) donc

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= f \left(\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= \text{Vect} \left(f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= \text{Vect} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) && C_1 \leftarrow 2C_1 \\ &&& C_2 \leftarrow 2C_2 \\ &&& C_3 \leftarrow -\frac{1}{2}C_3 \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) && C_2 \leftarrow C_2 + C_1. \end{aligned}$$

On remarque que $C_2 = 4C_3$ et donc on peut l'ôter :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2 .$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathcal{B}_I}$

La famille \mathcal{B}_I engendre $\text{Im}(f)$ et les deux vecteurs n'étant pas colinéaires, \mathcal{B}_I est libre. Conclusion,

$$\mathcal{B}_I = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Im}(f) .$$

NB : on retrouve bien que $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{Card}(\mathcal{B}_I) = 2$.

5. Pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f^2(X) = f(f(X)) = Af(X) = A(AX) = A^2X .$$

Donc

$$f^2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X \mapsto A^2X \end{array} .$$

De même,

$$f^3 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X \mapsto A^3X \end{array} .$$

6. On calcule

$$A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Puis,

$$\begin{aligned} A^3 &= AA^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= A^2 . \end{aligned}$$

Donc, par la question précédente, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$,

$$f^3(X) = A^3X = A^2X = f^2(X) .$$

Conclusion,

$$f^3 = f^2 .$$

On pose $F_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $G_1 = \text{Ker}(f^2)$.

7. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
 X \in F_1 &\Leftrightarrow (f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})(X) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\Leftrightarrow f(X) - X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\Leftrightarrow f(X) = X \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - y \\ 3x + y - 4z \\ x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y - 2x \\ 3x + y - 4z - 2y \\ x - y - 2z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ 3x - y - 4z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -4y - 4z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases} .
 \end{aligned}$$

D'où

$$F_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = -y \right\} = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathcal{B}_{F_1}} \right) .$$

La famille \mathcal{B}_{F_1} engendre F_1 et est libre car le vecteur est non nul. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B}_{F_1} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est une base de } F_1.}$$

On procède de même pour G_1 . Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
 X \in G_1 &\Leftrightarrow f^2(X) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\Leftrightarrow A^2 X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
 &\Leftrightarrow x = -y + 2z.
 \end{aligned}$$

Dès lors,

$$G_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y + 2z \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -y + 2z \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\mathcal{B}_{G_1}} \right).$$

La famille \mathcal{B}_{G_1} engendre donc G_1 . Les deux vecteurs n'étant pas colinéaires, on en déduit que \mathcal{B}_{G_1} est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B}_{G_1} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est une base de } G_1.}$$

8. Par la question précédente, on a $\dim(F_1) = \text{Card}(\mathcal{B}_{F_1}) = 1$ et $\dim(G_1) = \text{Card}(\mathcal{B}_{G_1}) = 2$. Donc
- $$\dim(F_1) + \dim(G_1) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

D'autre part,

$$F_1 + G_1 = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
 F_1 + G_1 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right) && C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\
 &&& C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_2 \leftrightarrow C_3 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\
 &&& C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_2 \leftarrow \frac{1}{2}C_2 \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\
 &= \mathbb{R}^3 && \text{car on reconnaît la base canonique.}
 \end{aligned}$$

Donc $\dim(F_1) + \dim(G_1) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ et $F_1 + G_1 = \mathbb{R}^3$. Conclusion,

$$F_1 \text{ et } G_1 \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3 \text{ i.e. } F_1 \oplus G_1 = \mathbb{R}^3.$$

Partie 2 : Un exemple dans $\mathbb{R}_2[X]$

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$\varphi(P) = P - (X + 1)P' + (X^2 - 1)P''.$$

On note $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$. On pose $F_2 = \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$ et $G_2 = \text{Ker}(\varphi^2)$.

9. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, $\varphi(P) = P - (X + 1)P' + (X^2 - 1)P''$ est un polynôme et l'on a $\deg(P) \leq 2$, $\deg(P') \leq 1$, $\deg(P'') \leq 0$. Donc $\deg((X + 1)P') \leq 2$, $\deg((X^2 - 1)P'') \leq 2$. Ainsi, $\deg(\varphi(P)) \leq 2$ et donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Donc φ va bien de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Alors,

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda P + \mu Q) &= \varphi(R) \\
 &= R - (X + 1)R' + (X^2 - 1)R'' \\
 &= \lambda P + \mu Q - (X + 1)(\lambda P' + \mu Q') + (X^2 - 1)(\lambda P'' + \mu Q'') \\
 &\hspace{15em} \text{par la linéarité de la dérivation} \\
 &= \lambda(P - (X + 1)P' + (X^2 - 1)P'') + \mu(Q - (X + 1)Q' + (X^2 - 1)Q'') \\
 &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).
 \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire. Conclusion,

$$\text{On a } \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]) \text{ i.e. } \varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].$$

10. (a) On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
 \varphi(1) &= 1 - 0 + 0 = 1 \\
 \varphi(X) &= X - (X + 1) + 0 = -1 \\
 \varphi(X^2) &= X^2 - (X + 1)(2X) + 2(X^2 - 1) = X^2 - 2X - 2.
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(X) = -1, \quad \varphi(X^2) = X^2 - 2X - 2.$$

(b) Par la question précédente,

$$\begin{aligned}
 \varphi^2(1) &= \varphi(\varphi(1)) = \varphi(1) = 1 \\
 \varphi^2(X) &= \varphi(-1) = -\varphi(1) = -1 && \text{car } \varphi \text{ est linéaire} \\
 \varphi^2(X^2) &= \varphi(X^2 - 2X - 2) \\
 &= \varphi(X^2) - 2\varphi(X) - 2\varphi(1) && \text{car } \varphi \text{ est linéaire} \\
 &= X^2 - 2X - 2 - 2(-1) - 2 \\
 &= X^2 - 2X - 2.
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi^2(1) = 1, \quad \varphi^2(X) = -1, \quad \varphi^2(X^2) = X^2 - 2X - 2.}$$

11. Donc les applications linéaires φ et φ^2 coïncident sur la base \mathcal{C} . Or une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base. Conclusion,

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi.}$$

Par suite, on a aussi,

$$\varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \varphi^2 = \varphi.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ vérifie } (\star) : \varphi^3 = \varphi^2.}$$

12. Puisque \mathcal{C} est une base de φ , on en déduit que $f(\mathcal{C})$ est une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi)$. Donc par la question 10.a

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(\mathcal{C})) = \text{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \text{Vect}(1, -1, X^2 - 2X - 2).$$

On remarque que $C_2 = -C_1$ donc on peut l'ôter. Ainsi,

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(1, X^2 - 2X - 2).$$

Posons $\mathcal{B}'_I = (1, X^2 - 2X - 2)$. Les deux polynômes n'étant pas colinéaires, on en déduit que \mathcal{B}'_I est libre. Comme elle engendre $\text{Im}(\varphi)$,

$$\boxed{\mathcal{B}'_I \text{ est une base de } \text{Im}(\varphi).}$$

Par suite, $\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi)) = \text{Card}(\mathcal{B}'_I) = 2$. Conclusion,

$$\boxed{\text{rg}(\varphi) = 2.}$$

13. (a) Par linéarité de φ puis par la question 10.a, on a

$$\varphi(X + 1) = \varphi(X) + \varphi(1) = -1 + 1 = 0_{\mathbb{R}}.$$

(b) Par la question précédente, on a $X + 1 \in \text{Ker}(\varphi)$. Or on sait que $\text{rg}(f) = 2$. Donc par le théorème du rang, on a

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \text{rg}(\varphi) = 3 - 2 = 1.$$

Donc $\mathcal{B}'_K = (X + 1)$ est une famille de $\text{Ker}(\varphi)$, libre car $X + 1 \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et telle que $\text{Card}(\mathcal{B}'_K) = \dim(\text{Ker}(\varphi))$. Ainsi, \mathcal{B}'_K est une base de $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi^2) = G_2$. Conclusion,

$$\boxed{G_2 = \text{Vect}(X + 1).}$$

14. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 P \in F_2 &\Leftrightarrow (\varphi - \text{Id}_{\mathbb{R}[X]})(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
 &\Leftrightarrow \varphi(P) = P \\
 &\Leftrightarrow \varphi(a_0 + a_1X + a_2X^2) = a_0 + a_1X + a_2X^2 \\
 &\Leftrightarrow a_0\varphi(1) + a_1\varphi(X) + a_2\varphi(X^2) = a_0 + a_1X + a_2X^2 && \text{par linéarité} \\
 &\Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2(X^2 - 2X - 2) = a_0 + a_1X + a_2X^2 && \text{par la question 10.a} \\
 &\Leftrightarrow -2a_2X - 2a_2 - a_1 = a_1X \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2a_2 = a_1 \\ -2a_2 - a_1 = 0 \end{cases} && \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\
 &\Leftrightarrow a_1 = -2a_2 \\
 &\Leftrightarrow P = a_2(X^2 - 2X) + a_0.
 \end{aligned}$$

En conséquence,

$$F_2 = \text{Vect}(X^2 - 2X, 1).$$

15. Posons $\mathcal{B}_{F_2} = (X^2 - 2X, 1)$. Cette famille est libre car les deux polynômes sont échelonnés en leur degré. De plus, \mathcal{B}_{F_2} engendre F_2 par la question précédente. Donc \mathcal{B}_{F_2} est une base de F_2 . Soit $\mathcal{B}_2 = (\mathcal{B}_{F_2}, \mathcal{B}'_K)$. La famille \mathcal{B}_2 est libre en tant que famille de polynômes non nuls de degrés distincts. De plus $\text{Card}(\mathcal{B}_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Donc \mathcal{B}_2 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donc \mathcal{B}_{F_2} est une base de F_2 , \mathcal{B}'_K est une base de G_2 et $\mathcal{B}_2 = (\mathcal{B}_{F_2}, \mathcal{B}'_K)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$F_2 \text{ et } G_2 \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_2[X] : F_2 \oplus G_2 = \mathbb{R}_2[X].$$

Partie 3 : Etude générale

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u^2$. On pose $F = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(u^2)$.

16. Soit $x \in G$. Alors, $u^2(x) = 0_E$. On veut montrer que $u(x) \in G$ i.e. que $u^2(u(x)) = 0_E$. On calcule :

$$u^2(u(x)) = u^3(x) = u^2(x) \quad \text{par } (\star).$$

Puisque $u^2(x) = 0_E$ alors on obtient bien que $u^2(u(x)) = 0_E$ et donc $u(x) \in G$. Conclusion,

$$G \text{ est stable par } u \text{ i.e. } u(G) \subset G.$$

17. Soit $x \in F$. Donc $(u - \text{Id}_E)(x) = 0_E$ i.e. $u(x) - x = 0_E$ ou encore $u(x) = x$. Donc directement, $u(x) = x \in F$. Conclusion,

$$F \text{ est stable par } u \text{ i.e. } u(F) \subset F.$$

18. Montrons que $\text{Ker}(u) \subset G$. Soit $x \in \text{Ker}(u)$. Alors $u(x) = 0_E$. On veut montrer que $x \in \text{Ker}(u^2)$ i.e. $u^2(x) = 0_E$. Puisque $u(x) = 0_E$, on a

$$u^2(x) = u(u(x)) = u(0_E) = 0_E \quad \text{car } u \text{ est linéaire.}$$

Ainsi, $x \in G$. Conclusion,

$$\text{Ker}(u) \subset G.$$

19. Soit $x \in F \cap G$. Alors, $x \in F$ et donc $u(x) = x$. De plus $x \in G$ donc $u(x) = 0_E$. Ainsi, $x = u(x) = 0_E$. Donc $F \cap G \subset \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subset F \cap G$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$. Conclusion,

$$\text{Les espaces } F \text{ et } G \text{ sont en somme directe, } F \oplus G.$$

20. (a) Soit $u \in \text{GL}(E)$ tel que $u^3 = u^2$. Puisque u est un automorphisme, u est bijective et donc u^{-1} existe. Alors $u^{-1} \circ u^3 = u^{-1} \circ u^2$ et donc $u^2 = u$. En composant à nouveau par u^{-1} , on obtient, $u = \text{Id}_E$. Conclusion,

Le seul automorphisme de E solution de (★) est l'identité : $u = \text{Id}_E$.

- (b) Dans ce cas, $u - \text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc $F = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) = E$. De plus, on a $u^2 = \text{Id}_E \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \in \text{GL}(E)$ et donc $G = \{0_E\}$. Conclusion, dans ce cas,

$$F = E \quad \text{et} \quad G = \{0_E\}.$$

On veut montrer par deux méthodes que F et G sont supplémentaires dans E .

21. **Méthode 1, en dimension finie.** On suppose dans cette question que E est de dimension finie.

- (a) Soit $y \in \text{Im}(u^2)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x)$. Montrons que $y \in F$ i.e. que $u(y) - y = 0_E$ ou encore $u(y) = y$. On a les calculs suivants :

$$u(y) = u(u^2(x)) = u^3(x) = u^2(x) \quad \text{par 10.a.}$$

Or par définition de x , $u^2(x) = y$. Donc $u(y) = y$ i.e. $u(y) - y = 0_E$ ou encore $y \in F$. Conclusion,

$$\text{Im}(u^2) \subset F.$$

- (b) Puisque F et G sont en somme directe, on en déduit que

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Or par la question précédente, $\dim(F) \geq \dim(\text{Im}(u^2)) = \text{rg}(u^2)$. Ainsi,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) \geq \text{rg}(u^2) + \dim(G).$$

Conclusion,

$$\dim(F + G) \geq \text{rg}(u^2) + \dim(\text{Ker}(u^2)).$$

- (c) Par le théorème du rang, on a $\text{rg}(u^2) + \dim(\text{Ker}(u^2)) = \dim(E)$. Donc par la question précédente,

$$\dim(F + G) \geq \dim(E).$$

Or $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\dim(F + G) \leq \dim(E)$ et ainsi $\dim(F + G) = \dim(E)$. Mais puisque $F + G \subset E$ on en déduit que $F + G = E$. Or on sait également que F et G sont en somme directe. Conclusion, sans effort (mais c'est normal car la dimension c'est béton et le théorème du rang, c'est puissant), on a établi que

Les espaces F et G sont supplémentaires dans E : $F \oplus G = E$.

22. **Méthode 2, en dimension éventuellement infinie.** Soit $x \in E$. On pose $x_F = u^2(x)$ et $x_G = x - u^2(x)$.

- (a) Calculons,

$$(u - \text{Id}_E)(x_F) = u(x_F) - x_F = u(u^2(x)) - u^2(x) = u^3(x) - u^2(x) = 0_E \quad \text{par (★)}.$$

Donc $x_F \in F$. Calculons également,

$$\begin{aligned}
 u^2(x_G) &= u^2(x - u^2(x)) = u^2(x) - u^4(x) = u^2(x) - u(u^3(x)) \\
 &= u^2(x) - u(u^2(x)) && \text{par } (\star) \\
 &= u^2(x) - u^3(x) \\
 &= u^2(x) - u^2(x) && \text{par } (\star) \\
 &= 0_E.
 \end{aligned}$$

Donc $x_G \in \text{Ker}(u^2) = G$. Conclusion,

$$x_F \in F \quad \text{et} \quad x_G \in G.$$

(b) Soit $x \in E$. Posons $x_F = u^2(x)$ et $x_G = x - u^2(x)$. Alors,

(i) On a $x_F + x_G = u^2(x) + x - u^2(x) = x$.

(ii) Par la question précédente, $x_F \in F$

(iii) et $x_G \in G$.

Par conséquent, on en déduit que $x \in F + G$. D'où $E \subset F + G$. Or on sait que $F + G \subset E$. Donc $F + G = E$. Or on a déjà vu que F et G sont en somme directe. Conclusion,

$$\text{Les espaces } F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E : F \oplus G = E.$$

Partie 4 : Cas de la dimension 3

On suppose dans cette partie que $\dim(E) = 3$. On cherche à construire une base \mathcal{B} adaptée à u .

23. On suppose que $\dim(F) = 3$. Puisque $F \subset E$ et que $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$ et donc $\text{Ker}(u - \text{Id}) = E$ ou encore

$$\forall x \in E, \quad x \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \text{ et donc } u(x) = x.$$

Conclusion, dans ce cas,

$$u = \text{Id}_E.$$

24. On suppose que $\dim(F) = 2$.

(a) Par la question 21.c, on a $F \oplus G = E$. Donc $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. Dès lors, $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F) = 3 - 2 = 1$. Or par la question 18., $\text{Ker}(u) \subset G$. Donc $\dim(\text{Ker}(u)) \leq \dim(G) = 1$. Conclusion,

$$\dim(\text{Ker}(u)) \in \{0; 1\}.$$

(b) Supposons $\dim(\text{Ker}(u)) = 0_E$. Alors $\text{Ker}(u) = 0_E$. Donc u est injectif. Or u est un endomorphisme de E et E est de dimension finie. Donc u est un automorphisme. Donc par la question 20.a, $u = \text{Id}_E$ et donc $F = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) = E$. En particulier $\dim(F) = 3$ ce qui contredit l'hypothèse $\dim(F) = 2$. Conclusion,

$$\dim(\text{Ker}(u)) = 1.$$

(c) Par la question 18., $\text{Ker}(u) \subset G$. Or par la question précédente, $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$. Et on a déjà vu que $\dim(G) = 1$. Donc $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(G)$. Conclusion,

$$G = \text{Ker}(u).$$

- (d) On sait que $\dim(G) = 1$. Donc G possède des bases de cardinal 1. Soit (e_3) une base de G . De même on sait que $\dim(F) = 2$ donc F admet des bases de cardinal 2. Soit (e_1, e_2) une base de F . Puisque $e_3 \in G$, par la question précédente, $e_3 \in \text{Ker}(u)$ et donc $u(e_3) = 0_E$. D'autre part, on sait que $e_1 \in F = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$. Donc $u(e_1) = e_1$ et de même $e_2 \in F$ et donc $u(e_2) = e_2$. Enfin, on sait par la question 21.c que F et G sont supplémentaires. Donc par le théorème de la base adaptée, on en déduit que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E . Conclusion,

$$\boxed{\exists \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ base de } E \text{ telle que } u(e_1) = e_1, u(e_2) = e_2 \text{ et } u(e_3) = 0_E.}$$

25. On suppose que $\dim(F) = 1$. Soit $v : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$.

- (a) Soit $x \in G$. Alors, $x \in E$ et donc $u(x)$ existe. De plus, on sait que la restriction de u à G est linéaire car u est linéaire. Enfin puisque que G est stable par u alors comme $x \in G$, on a $v(x) = u(x) \in G$. Donc v va bien de G dans G . Conclusion,

$$\boxed{v \in \mathcal{L}(G), \text{ l'application } v \text{ est un endomorphisme de } G.}$$

- (b) Soit $x \in G = \text{Ker}(u^2)$. On a alors,

$$v^2(x) = u^2(x) = 0_E.$$

Donc

$$\boxed{v^2 = 0_{\mathcal{L}(G)}}.$$

On sait que $\text{rg}(v) = \dim(\text{Im}(v)) \leq \dim(G)$. Or d'après 21.c G et F sont supplémentaires dans E . Donc $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F) = 3 - 1 = 2$. Ainsi,

$$\text{rg}(v) \leq 2.$$

Supposons que $\text{rg}(v) = 2$. Alors, $\text{rg}(v) = \dim(G)$ et donc G est surjective. Or v est un endomorphisme de G donc v est un automorphisme de G . Donc v^2 aussi, ce qui contredit le fait que $v^2 = 0_{\mathcal{L}(G)}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{rg}(v) \in \{0, 1\}}.$$

- (c) Supposons que $\text{rg}(v) = 0$. Alors, $v = 0_{\mathcal{L}(G)}$. Donc pour tout $x \in G$, $u(x) = v(x) = 0_E$. On sait que $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 2$. Soient (e_1) une base de F et (e_2, e_3) une base de G . Puisque $e_1 \in F$, on a $u(e_1) = e_1$. Puisque e_2 et e_3 sont dans G , on en déduit que $u(e_2) = u(e_3) = 0_E$. Enfin, puisque $F \oplus G = E$, par le théorème de la base adaptée, on en déduit que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E . Conclusion,

$$\boxed{\exists \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ une base de } E \text{ telle que } u(e_1) = e_1, u(e_2) = 0_E \text{ et } u(e_3) = 0_E.}$$

- (d) Si $\text{rg}(v) = 1$,

- (i) Puisque $\text{rg}(v) = 1$, on sait que $\text{Im}(v) \neq \{0_E\}$. Donc il existe $e_2 \in \text{Im}(v)$ tel que $e_2 \neq 0_E$. Puisque $e_2 \in \text{Im}(v)$, par définition, il existe $e_3 \in G$ tel que $v(e_3) = e_2$. Ainsi, on a bien

$$\boxed{\exists (e_2, e_3) \in \text{Im}(v) \times G, e_2 \neq 0_E, \quad v(e_3) = e_2.}$$

- (ii) Par la question 25.b, on sait que $v^2 = 0_{\mathcal{L}(G)}$. Donc

$$\boxed{v(e_2) = v(v(e_3)) = v^2(e_3) = 0_E.}$$

(iii) Montrons que (e_2, e_3) est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\lambda e_2 + \mu e_3 = 0_E$, alors, en composant par v ,

$$\begin{aligned} v(\lambda e_2 + \mu e_3) = v(0_E) &\Rightarrow \lambda v(e_2) + \mu v(e_3) = 0_E && \text{par linéarité} \\ &\Rightarrow 0_E + \mu e_2 = 0_E \\ &\Rightarrow \mu = 0_{\mathbb{K}} && \text{car } e_2 \neq 0_E. \end{aligned}$$

Donc $\lambda e_2 + \mu e_3 = \lambda e_2 = 0_E$ et donc $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ car $e_2 \neq 0_E$. Ainsi, $\lambda = \mu = 0_{\mathbb{K}}$. Par conséquent, (e_2, e_3) est libre. De plus e_2 et e_3 sont deux vecteurs de G et $\text{Card}(e_2, e_3) = 2 = \dim(G)$. Conclusion,

$$\boxed{(e_2, e_3) \text{ est une base de } G.}$$

(e) On sait que F est de dimension 1 donc admet des bases de cardinal 1. Soit (e_1) une base de F . Puisque (e_2, e_3) est une base de G et que F et G sont supplémentaires dans E , par le théorème de la base adaptée, on en déduit que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E . De plus, on a déjà vu que $u(e_2) = v(e_2) = 0_E$ et $u(e_3) = v(e_3) = e_2$. Enfin, $e_1 \in F = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$, donc $u(e_1) = e_1$. Conclusion,

$$\boxed{\exists \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) \in E^3 \text{ base de } E \text{ telle que } u(e_1) = e_1, u(e_2) = 0_E \text{ et } u(e_3) = e_2.}$$

26. On suppose enfin que $\dim(F) = 0$.

(a) Par hypothèse, on a donc $F = \{0_E\}$. Puisque G est un supplémentaire de F , on a $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F) = \dim(E)$ et donc $G = E$. Autrement dit $\text{Ker}(u^2) = E$ ou encore pour tout $x \in E$, $u^2(x) = 0_E$. Conclusion,

$$\boxed{u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}}.$$

(b) Soit $x \in \text{Im}(u)$. Alors, il existe $x' \in E$ tel que $x = u(x')$. Donc,

$$u(x) = u(u(x')) = u^2(x') = 0_E \quad \text{par la question précédente.}$$

Donc $x \in \text{Ker}(u)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u).}$$

(c) Par la question précédente, on a $\text{rg}(u) \leq \dim(\text{Ker}(u))$. Donc par le théorème du rang,

$$\text{rg}(u) \leq \dim(E) - \text{rg}(u) = 3 - \text{rg}(u) \quad \Rightarrow \quad 2\text{rg}(u) \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \text{rg}(u) \leq \frac{3}{2}.$$

Puisque $\text{rg}(u)$ est un entier naturel, on en déduit que

$$\boxed{\text{rg}(u) \in \{0; 1\}}.$$

(d) On suppose $u \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(i) Par la question précédente, $\text{rg}(u) = 1$ donc les bases de $\text{Im}(u)$ sont de cardinal 1. Soit (e_1) une base de $\text{Im}(u)$ i.e. $e_1 \neq 0_E$ et $e_1 \in \text{Im}(u)$. Puisque $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}(u)$, il admet un supplémentaire dans $\text{Ker}(u)$: il existe H un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}(u)$ tel que $\text{Im}(u) \oplus H = \text{Ker}(u)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \dim(H) &= \dim(\text{Ker}(u)) - \text{rg}(u) \\ &= \dim(E) - \text{rg}(u) - \text{rg}(u) = 3 - 1 - 1 = 1 && \text{par le théorème du rang.} \end{aligned}$$

Donc H admet des bases de cardinal 1. Soit (e_2) une base de H i.e. $e_2 \neq 0_E$ et $e_2 \in H$. Puisque H est un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}(u)$, $e_2 \in \text{Ker}(u)$. Supposons que $e_2 \in \text{Im}(u)$, alors $e_2 \in H \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$ car H et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires. Donc $e_2 = 0_E$. Contradiction. Donc

$e_2 \notin \text{Im}(u)$ et ainsi, $e_2 \in \text{Ker}(u) \setminus \text{Im}(u)$. Enfin, puisque $e_1 \in \text{Im}(u)$, il existe $e_3 \in E$ tel que $u(e_3) = e_1$. Posons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On a bien $\mathcal{B} \in (\text{Im}(u) \setminus \{0_E\}) \times (\text{Ker}(u) \setminus \text{Im}(u)) \times E$. Puisque $e_1 \in \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$, on a $u(e_1) = 0_E$. Puisque $e_2 \in \text{Ker}(u)$, on a aussi $u(e_2) = 0_E$ et par construction de e_3 , on a $u(e_3) = e_1$. Conclusion,

$$\boxed{\exists \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) \in (\text{Im}(u) \setminus \{0_E\}) \times (\text{Ker}(u) \setminus \text{Im}(u)) \times E}$$

telle que

$$\boxed{u(e_1) = 0_E, u(e_2) = 0_E \text{ et } u(e_3) = e_1.}$$

(ii) Montrons que \mathcal{B} est libre. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_E$. Alors en composant par u et par linéarité de u ,

$$0_E = u(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = \lambda_1 u(e_1) + \lambda_2 u(e_2) + \lambda_3 u(e_3) = 0_E + 0_E + \lambda_3 e_1.$$

Or $e_1 \neq 0_E$ donc $\lambda_3 = 0_{\mathbb{K}}$. Ainsi, $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E$. Supposons $\lambda_2 \neq 0_{\mathbb{K}}$. Alors,

$$e_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \underbrace{e_1}_{\in \text{Im}(u)} \in \text{Im}(u).$$

ce qui contredit l'hypothèse $e_2 \in \text{Ker}(u) \setminus \text{Im}(u)$. Donc $\lambda_2 = 0_{\mathbb{K}}$. Enfin, il nous reste $\lambda_1 e_1 = 0_E$ et donc $\lambda_1 = 0_{\mathbb{K}}$. D'où, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{K}}$. Donc \mathcal{B} est libre. Or

$$\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(E).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E.}$$

27. On sait que $\dim(F_1) = 1$. Donc on est dans la situation de la question 25.. Il nous faut donc déterminer si la restriction de f à G_1 , notons-là g est de rang 1 ou 0. Puisque $\mathcal{B}_{G_1} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ est une base de G_1 , on a

$$\begin{aligned} \text{Im}(g) &= \text{Vect} \left(g \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), g \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) \\ &= \text{Vect} \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{car } C_1 = -C_2. \end{aligned}$$

Puisque le vecteur est non nul, il forme une famille libre et génératrice de $\text{Im}(g)$ et donc une base de $\text{Im}(g)$. Ainsi, $\text{rg}(g) = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La partie 1 correspond à la situation de la question 25.e.}}$$

28. Dans la partie 2, on sait que $\dim(F_2) = 2$ et donc

$$\boxed{\text{La partie 2 correspond à la situation de la question 24.d.}}$$

Problème I - Variables aléatoires

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. On considère une urne contenant N boules rouges et N boules vertes. On fixe (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de ce problème. On effectue successivement des tirages uniformes dans l'urne avec le protocole suivant :

- Si l'on pioche une boule rouge, on la peint en vert et on la replace dans l'urne.
- Si l'on pioche une boule verte, on la remet dans l'urne sans changer sa couleur.

Au tirage $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire retournant 1 si la boule est rouge et 0 sinon.

Partie 1 : Loïs initiales

1. L'univers image de X_1 est $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$. Nécessairement, X_1 est une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre $p = \mathbb{P}(X_1 = 1)$. L'évènement $(X_1 = 1)$ correspond à avoir obtenu une boule rouge au premier tirage. Initialement, l'urne contient N boules rouges parmi les $2N$ boules. Le tirage étant uniforme, on obtient

$$p = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$X_1 \text{ est une loi de Bernoulli de paramètre } 1/2 : X_1 \sim \mathcal{B}(1/2).$$

2. On cherche $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$. On note que, par la question précédente, l'évènement $(X_1 = 1)$ n'est pas négligeable donc cette probabilité existe. Si l'on a obtenu une boule rouge au premier tirage, alors on l'a peinte en verte et donc à l'étape suivante l'urne possède $N - 1$ boules rouges et $N + 1$ boules vertes. Le tirage étant uniforme, on obtient donc

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{N - 1}{N - 1 + N + 1} = \frac{N - 1}{2N}.$$

Conclusion,

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{N - 1}{2N}.$$

3. On cherche la loi de X_2 . Comme dans la question 1. l'univers image de X_2 est $X_2(\Omega) = \{0; 1\}$. Donc X_2 est une loi de Bernoulli. Calculons son paramètre $p = \mathbb{P}(X_2 = 1)$. La famille $((X_1 = 1), (X_1 = 0))$ forme un système complet d'évènements, donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) \mathbb{P}(X_1 = 0).$$

Par la question précédente, $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{N-1}{2N}$. De même, si l'on a pioché une boule verte : $(X_1 = 0)$, alors la composition de l'urne n'a pas changé. Donc $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$. Enfin, par la question 1. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$. D'où,

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{N - 1}{2N} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{N - 1 + N}{4N} = \frac{2N - 1}{4N}.$$

Conclusion,

$$X_2 \text{ est une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{2N - 1}{4N} : X_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{2N - 1}{4N}\right).$$

4. Par la question précédente, $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{2N-1}{4N}$. De plus, par la question 2. $\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) = \frac{N-1}{2N}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 (X_1 = 1) \text{ et } (X_2 = 1) \text{ indépendants} &\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1) \\
 &\Leftrightarrow \frac{2N-1}{4N} = \frac{N-1}{2N} \\
 &\Leftrightarrow 2N-1 = 2N-2 \\
 &\Leftrightarrow -1 = -2.
 \end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours fausse. On conclut que

$$\boxed{(X_1 = 1) \text{ et } (X_2 = 1) \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

5. On cherche $\mathbb{P}(X_1 = 0 | X_2 = 1)$. Par la question 3. $\mathbb{P}(X_2 = 1) \neq 0$. Donc cette probabilité existe. De plus, par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 | X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) \mathbb{P}(X_1 = 0)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)}.$$

Toujours par la question 3. $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{2N-1}{4N}$. Par la question 1. $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$. Enfin, si l'on a pioché une boule verte i.e. $X_1 = 0$ alors la composition de l'urne n'a pas changé donc

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 | X_2 = 1) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2N-1}{4N}} = \frac{N}{2N-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 0 | X_2 = 1) = \frac{N}{2N-1}.}$$

Partie 2 : Autour de la somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. On fixe $n \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket$.

6. Puisque chaque X_i peut valoir 0 ou 1, au minimum tous les X_i sont nuls et dans ce cas $S_n = 0$. Au contraire, au maximum tous les X_i sont égaux à 1 et dans ce cas $S_n = \sum_{i=1}^n 1 = n$. On note que cette configuration est possible car $n \leq N$. En effet, chaque boule rouge lorsqu'elle est tirée est peinte en verte, donc on ne peut pas tirer plus que N boules rouges. Comme le nombre de tirages n est plus petit que le nombre de boules rouges, il est toujours possible d'obtenir une boule rouge à chaque tirage. Conclusion,

$$\boxed{S_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket.}$$

7. On observe que $(S_n = 0)$ correspond à l'évènement $\left(\sum_{i=1}^n X_i = 0\right)$ i.e. $(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \dots \cap (X_n = 0)$. Ainsi,

$$\boxed{(S_n = 0) \text{ correspond à n'avoir obtenu que des boules vertes durant les } n \text{ premiers tirages.}}$$

Mathématiquement,

$$\boxed{(S_n = 0) = \bigcap_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} (X_i = 0).}$$

Dès lors,

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} (X_i = 0)\right).$$

Les tirages n'étant pas indépendants, on ne peut pas séparer directement les probabilités. Cependant par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(X_{i+1} = 0 \mid \bigcap_{j \in \llbracket 1; i \rrbracket} (X_j = 0)\right) \times \mathbb{P}(X_1 = 0).$$

Soit $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Si $\bigcap_{j \in \llbracket 1; i \rrbracket} (X_j = 0)$ cela signifie que l'on a pioché que des boules vertes donc la composition de l'urne n'a pas changé. Ainsi, l'urne possède toujours N boules vertes et N boules rouges. Dans ce cas, la probabilité de piocher une boule verte au tirage $i+1$ est de

$$\mathbb{P}\left(X_{i+1} = 0 \mid \bigcap_{j \in \llbracket 1; i \rrbracket} (X_j = 0)\right) = \frac{1}{2}.$$

De plus on sait que $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{2} \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{2^n}}.$$

8. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On note qu'il est possible d'avoir pioché $k \leq n \leq N$ boules rouges durant les n premiers tirages donc $\mathbb{P}(S_n = k) \neq 0$. Si $S_n = k$ est réalisé cela signifie que l'on a tiré k boules rouges et donc $n - k$ boules vertes. Les boules vertes piochées ont été remises sans changement mais les k boules rouges sont devenues des boules vertes. Donc l'urne possède $N - k$ boules rouges et $N + k$ boules vertes et donc toujours un total de $N - k + N + k = 2N$ boules. La probabilité étant uniforme, celle de piocher une boule rouge au tirage suivant est donc de

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) = \frac{N - k}{2N}.$$

Puisque $\mathbb{P}_{(S_n=k)}$ est une probabilité, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid S_n = k) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) = \frac{2N - N + k}{2N} = \frac{N + k}{2N}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) = \frac{N - k}{2N} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid S_n = k) = \frac{N + k}{2N}}.$$

9. Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Soit $j \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i) &= \mathbb{P}(S_n + X_{n+1} = j \mid S_n = i) \\ &= \mathbb{P}(i + X_{n+1} = j \mid S_n = i) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = j - i \mid S_n = i). \end{aligned}$$

Si $j - i \notin \{0; 1\}$ i.e. $j < i$ ou $j > i + 1$, alors $\mathbb{P}(X_{n+1} = j - i \mid S_n = i) = 0$. Si $j = i$, par la question précédente,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid S_n = i) = \frac{N + i}{2N}.$$

Si $j = i + 1$, de même par la question précédente,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = i) = \frac{N - i}{2N}.$$

Conclusion,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i) = \begin{cases} \frac{N+i}{2N} & \text{si } j = i \\ \frac{N-i}{2N} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Par la question 1. $(S_n = i)_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ forme un système complet d'évènement. Donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = i) \mathbb{P}(S_n = i).$$

Donc par la question précédente, en prenant $j = k$, on a si $i \neq j = k$ et $i \neq j - 1 = k - 1$ $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = i) = 0$:

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 0 + \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k - 1) \mathbb{P}(S_n = k - 1) + \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k) \mathbb{P}(S_n = k) + 0.$$

Toujours par la question précédente, si $i = k = j$, on a $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k) = \frac{N+k}{2N}$ et si $i = j - 1 = k - 1$, $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k - 1) = \frac{N-(k-1)}{2N} = \frac{N-k+1}{2N}$. Conclusion,

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{N - k + 1}{2N} \mathbb{P}(S_n = k - 1) + \frac{N + k}{2N} \mathbb{P}(S_n = k).$$

On admet/vérifie facilement que la formule reste vraie pour $k = 0$ ou $k = n + 1$.

Partie 3 : Comportement asymptotique de l'espérance

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(S_n = k)$.

Le nombre u_n correspond au nombre moyen de boules blanches obtenues durant n tirages.

11. Soit $n \in \llbracket 1; N - 1 \rrbracket$. En sommant le résultat de la question précédente entre 1 et $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{k=1}^{n+1} k \frac{N - k + 1}{2N} \mathbb{P}(S_n = k - 1) + \sum_{k=1}^{n+1} k \frac{(N + k)}{2N} \mathbb{P}(S_n = k).$$

On effectue alors le glissement d'indice $\tilde{k} = k - 1$ dans la première somme :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{k=0}^n (k + 1) \frac{N - (k + 1) + 1}{2N} \mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{k=1}^{n+1} k \frac{(N + k)}{2N} \mathbb{P}(S_n = k).$$

Conclusion, pour tout $n \in \llbracket 1; N - 1 \rrbracket$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{k=0}^n \frac{(k + 1)(N - k)}{2N} \mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(N + k)}{2N} \mathbb{P}(S_n = k).$$

12. Soit $n \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket$. Par définition,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 0 + \sum_{k=1}^{n+1} k \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)(N-k)}{2N} \mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(N+k)}{2N} \mathbb{P}(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)(N-k)}{2N} \mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{k=0}^n \frac{k(N+k)}{2N} \mathbb{P}(S_n = k) \\ &\quad + \frac{(n+1)(N+n+1)}{2N} \mathbb{P}(S_n = n+1) - 0 \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{kN - k^2 + N - k + kN + k^2}{2N} \mathbb{P}(S_n = k) + 0 \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k(2N-1) + N}{2N} \mathbb{P}(S_n = k) \\ &= \frac{2N-1}{2N} \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(S_n = k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_n = k). \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(S_n = k) = u_n$ et $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_n = k) = 1$ car $(S_n = k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ forme un système complet.

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket, \quad u_{n+1} = \frac{2N-1}{2N} u_n + \frac{1}{2}.}$$

On admet que cette formule reste vraie pour $n \geq N$.

13. Puisque N est fixé, on observe que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On a

$$\omega = \frac{2N-1}{2N} \omega + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2N-2N+1}{2N} \omega = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{2N}{2} = N.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \omega = u_n - N$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} = u_{n+1} - N &= \frac{2N-1}{2N} u_n + \frac{1}{2} - N \\ &= \frac{2N-1}{2N} (v_n + N) + \frac{1}{2} - N \\ &= \frac{2N-1}{2N} v_n + \frac{2N-1}{2} + \frac{1}{2} - N \\ &= \frac{2N-1}{2N} v_n. \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2N-1}{2N}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_n + N = \left(\frac{2N-1}{2N} \right)^{n-1} v_1 + N = \left(\frac{2N-1}{2N} \right)^{n-1} (u_1 - N) + N.$$

Or

$$u_1 = 0 \times \mathbb{P}(S_1 = 0) + 1 \times \mathbb{P}(S_1 = 1) = \mathbb{P}(S_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\frac{2N-1}{2N} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - N \right) + N = N - \left(\frac{2N-1}{2N} \right)^{n-1} \frac{2N-1}{2} = N - N \left(\frac{2N-1}{2N} \right)^n.$$

Conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = N \left[1 - \left(\frac{2N-1}{2N} \right)^n \right].$$

14. Puisque $2N-1 < 2N$, on a $0 \leq \frac{2N-1}{2N} < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2N-1}{2N} \right)^n = 0$. Conclusion,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = N.$$

Asymptotiquement, le nombre moyen de boules rouges tirées est de N , cela est cohérent car chaque boule rouge ne peut être tirée qu'une seule fois avant de devenir verte. Donc on ne peut piocher au maximum que N boules rouges. De plus si l'on pioche un nombre infini de fois, on finira bien par toutes les avoir piochées dans ce cas, on s'attend bien à ce que S_n stationne à N systématiquement et donc notamment en moyenne.