

Devoir de Révision PTSI d'après Banque PT - Maths C - 2025

Les parties en *bleu avec astérisque* ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Préambule

1. (*) Etudier la convergence des séries

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^4 + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{n^4 + 1}.$$

2. (*) Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.
3. (*) Comparer (sans les calculer) pour $X \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_{1/X}^X \frac{t^2}{t^4 + 1} dt \quad \text{et} \quad \int_{1/X}^X \frac{dt}{t^4 + 1}.$$

(On pourra utiliser le changement de variable $\frac{1}{t} = x$.)

Partie I

1. Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_h de la fonction h qui, à tout réel t de \mathcal{D}_h , associe :

$$h(t) = \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t}$$

2. Soit X un réel positif. Calculer $\int_0^X h(t) dt$ puis, à l'aide de ce résultat, $\int_X^0 h(-t) dt$.

3. Que vaut :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X (h(t) + h(-t)) dt \quad ?$$

4. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction φ qui, à tout réel t , associe :

$$\varphi(t) = \frac{2}{2\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$$

5. On considère la fonction g qui, à tout réel t de son domaine de définition \mathcal{D}_g , associe :

$$g(t) = \frac{\sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t}$$

Montrer que $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_h$, puis déterminer une primitive G de g sur \mathcal{D}_g .

6. Utiliser la primitive de g obtenue lors du calcul de la question précédente pour calculer simplement, pour tout réel positif X :

$$\int_0^X g(-t) dt$$

7. Déterminer :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X (g(t) + g(-t)) dt$$

8. Calculer, pour tout réel $t \geq 0$:

$$h(t) + h(-t) + g(t) + g(-t)$$

9. (a) (*) Que vaut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{t^2}{t^4 + 1} dt.$$

(b) (*) Dédurre des questions précédentes et du Préambule la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{1/X}^X \frac{dt}{t^4 + 1}.$$

10. Calculer $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt$. On donnera la réponse en fonction de $\text{Arctan } 2$ et $\ln(5)$.

Partie II

1. Dans cette question, C et S désignent deux fonctions à valeurs réelles, paires, définies sur \mathbb{R} .

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(\mathcal{E}_1) \quad \forall x \in \mathbb{R} : C'(x) = -2xS(x)$$

et

$$(\mathcal{E}_2) \quad \forall x \in \mathbb{R} : S'(x) = 2xC(x)$$

avec les conditions initiales

$$C(0) = 1 \quad \text{et} \quad S(0) = 0$$

Le but de cette question est de déterminer les expressions des fonctions C et S .

(a) (*) Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 6$. Pour tout réel x de \mathbb{R} , on pose :

$$C_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n \quad \text{et} \quad S_N(x) = \sum_{n=0}^N b_n x^n$$

et on considère les équations

$$(\mathcal{E}_1(N)) \quad \forall x \in \mathbb{R} : C'_N(x) = -2xS_N(x) + 2b_N x^{N+1}$$

et

$$(\mathcal{E}_2(N)) \quad \forall x \in \mathbb{R} : S'_N(x) = 2xC_N(x) - 2a_N x^{N+1}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n entre 1 et $N - 1$:

$$(n+1)a_{n+1} = -2b_{n-1} \quad \text{et} \quad (n+1)b_{n+1} = 2a_{n-1}$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n entre 4 et $N - 2$:

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)}a_{n-4}$$

(c) On rappelle que les fonctions C et S sont supposées paires. Que peut-on en déduire pour les coefficients respectifs ?

(d) i. Montrer que tout entier naturel n peut s'écrire sous l'une des formes suivantes

$$n = 4p \quad \text{ou} \quad n = 4p + 1 \quad \text{ou} \quad n = 4p + 2 \quad \text{ou} \quad n = 4p + 3$$

où p est dans \mathbb{N} .

ii. Montrer que, pour tout entier naturel n entre 1 et N qui n'est pas multiple de 4 :

$$a_n = 0$$

(e) Montrer que, pour tout entier naturel p tel que $4p$ est entre 0 et N :

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}$$

(f) i. (*) Déterminer les valeurs de x dans \mathbb{R} pour lesquelles $\sum a_n x^n$ converge.

ii. (*) Déterminer C et S deux fonctions définies sur \mathbb{R} telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $C(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} C_N(x) + o(x^N)$ et $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} S_N(x) + o(x^N)$.

iii. (*) Vérifier que C et S sont solutions de (\mathcal{E}_1) , respectivement (\mathcal{E}_2) .

2. On considère la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x^{4n}$.

(a) (*) Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n x^{4n}$ converge et en cas d'existence, ex-

primer $D(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$ sa somme totale en fonction de x et $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$ en fonction de $N \in \mathbb{N}$ et de $x \in \mathbb{R}$.

(b) (*) Montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} R_N(x) dx = 0$.

(c) Montrer que $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{1+x^4}$ peut s'exprimer comme la somme d'une série numérique, que l'on explicitera.

(d) Que vaut :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)} \quad ?$$

Partie III

Pour tout réel $X > 0$, on pose :

$$I(X) = \int_1^X \cos(t^2) dt \quad , \quad J(X) = \int_1^X \sin(t^2) dt$$

1. (*) Montrer la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-n^2}$.

On donne, pour la suite du problème :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. (*) Etudier la convergence des séries

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin(n^2)}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\cos(n^2)}{n^2}$$

On admet l'existence des limites suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{\sin(t^2)}{t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^2} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X \frac{\cos(t^2)}{t^2} dt.$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que les limites

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} I(X) \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} J(X)$$

existent et sont finies.

4. (*) Montrer l'existence de la limite suivante : la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} e^{it^2} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X e^{it^2} dt.$$

5. Soit t un réel. Donner une expression sous la forme d'une somme totale de e^{it^2} .

6. (a) (*) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_{\tilde{f}}$ de la fonction \tilde{f} :

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{-(n^2+i)x^2}}{n^2+i}.$$

On considère la fonction f

$$x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt$$

et on admet que son domaine de définition \mathcal{D}_f est égal à $\mathcal{D}_{\tilde{f}}$.

(b) Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x^2} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_1^X e^{-t^2 x^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$$

(c) Dédurre de la question précédente la valeur de :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(d) ~~Etudier la dérivabilité sur \mathbb{R}_+^* de la fonction f introduite à la question 6. (a) (pour cela, on se placera sur un intervalle de la forme $[\varepsilon, a]$, où ε et a sont deux réels strictement positifs tels que $\varepsilon \ll a$).~~

(e) On admet que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} -2xe^{-(t^2+i)x^2} dt$. Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$f'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$$

(f) En déduire, à l'aide des résultats de la Partie I, la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$$

puis de

$$\int_0^{+\infty} C(x) dx \text{ et } \int_0^{+\infty} S(x) dx$$

où S et C sont les fonctions introduites au début de la Partie II.

Dans ce problème, on calcule, à l'aide d'intégrales généralisées, la valeur de l'intégrale (complexe) $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$, connue comme l'expression complexe des intégrales (réelles) de Fresnel, qui interviennent dans les phénomènes de diffraction. La somme pour toutes les valeurs de x peut s'interpréter intuitivement (et de façon très simplifiée) comme le fait qu'à chaque fois qu'une onde lumineuse se propage, une infinité de rayons sont à prendre en compte – et on somme les effets de cette infinité de rayons, en lien avec le principe de superposition de Huygens-Fresnel, en physique.

Fin de l'énoncé