

Banque PT - Maths A - 2023

Version pour juniors

Les parties en *bleu avec astérisque* ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Le sujet est composé de 2 exercices indépendants.

Exercice 1 : Matrices unipotentes

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites *unipotentes* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Etude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) (*) Déterminer les racines du polynôme P défini par $P(X) = \det(XI - A)$.
- (b) (*) Montrer que A n'est pas semblable à la matrice identité I .
- (c) (*) Pour toute racine λ de P , calculer $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$.
- (d) Résoudre l'équation $(A - I)X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- (e) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A . Déterminer trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = 2e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_3) = -2e_2 + e_3.$$

On pourra utiliser la question précédente.

- (f) En déduire une matrice P telle que $A = PBP^{-1}$.

2. Etude de $\mathcal{N}$.

- (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.
- (b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout $(N, M) \in \mathcal{N}^2$, on a $NM \in \mathcal{N}$.
- (c) Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$.

3. Etude de $\mathcal{U}$.

- (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On justifiera la réponse.
- (b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.

(c) Montrer que $\mathcal{U} \subset \text{GL}_3(\mathbb{R})$ où $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Soient $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2.$$

On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.

(a) Calculer $B^{(\alpha)}$ pour $\beta \in \mathbb{R}$ où B est la matrice définie à la question 1.

(b) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$.

(c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)} U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad (U^{(\alpha)})^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}.$$

(d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} = \underbrace{U \times \cdots \times U}_{n \text{ fois}}$.

(e) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geq 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?

(f) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.

5. (a) En utilisant les résultats de la question 4, expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique ?

(b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D).

Exercice 2 : Probabilités

Cet exercice comporte trois parties. Les parties 2 et 3 sont indépendantes.

Un jeu consiste à lancer un ballon dans un panier. On suppose que la probabilité de réussir le panier est $p \in]0; 1[$ et que les lancers sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

Partie 1 : Etude du jeu de lancer

1. (*) On note T le nombre de lancers nécessaires pour réussir un panier pour la première fois. On note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k la variable aléatoire valant 1 si le panier k est réussi et 0 sinon.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de X_k ?

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $(T = n)$ à l'aide des variables aléatoires X_k .

(c) En déduire la loi de T .

2. On effectue une infinité de lancers. Calculer la probabilité de réussir au moins un panier.

3. L'organisateur du jeu ne connaît pas la valeur de p et souhaite en connaître une valeur approchée. Pour cela il observe $N \in \mathbb{N}^*$ lancers et note le nombre S_N de paniers réussis.

(a) Quelle est la loi de S_N ? On explicitera la loi en justifiant brièvement la réponse.

(b) Montrer que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

(c) Montrer que pour $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}$.

Partie 2 : Un deuxième jeu

Le joueur met une pièce de 1 euro dans un sac à chaque lancer du ballon. Une fois le panier réussi, l'organisateur organise un deuxième jeu :

- L'organisateur enlève une pièce de 1 euro, qu'il garde pour lui, et la remplace par une pièce noire qui donne droit à $M \geq 2$ euros.
- Le joueur tire une pièce du sac.
- L'organisateur conserve les autres pièces du sac.

On rappelle que la variable T a été définie à la question 1.

4. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}^*$ et l'évènement $(T = n)$ est réalisé : il y a donc n pièces dans le sac : $n - 1$ pièces de 1 euro et la pièce noire.

On note G_n la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur.

(a) Vérifier que $G_n(\Omega) = \{n - M, n - 1\}$, puis donner la loi de G_n .

(b) Calculer l'espérance de G_n .

5. (*) Déterminer, suivant la valeur de x , la nature de la série suivante et, en cas de convergence, calculer sa somme totale : $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$.

(*) Indication : on pourra primitiver la somme partielle.

(*) On admet dans la suite que $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ converge sur $[-1; 1[$ et

$$\forall x \in [-1; 1[\setminus \{0\}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

On pourra utiliser ces résultats dans les calculs des questions suivantes.

6. On note A l'évènement « tirer la pièce noire ».

(a) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbf{P}_{(T=n)}(A)$.

(b) En utilisant la formule des probabilités totales, dont on justifiera l'utilisation, montrer que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{p}{q} \ln\left(\frac{1}{p}\right).$$

7. On note G la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur après ce deuxième jeu.

(a) Montrer que $G(\Omega) = \{k \in \mathbb{Z}, k \geq 1 - M\}$.

(b) Donner pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in G(\Omega)$ la valeur de $\mathbf{P}_{(T=n)}(G = k)$.

On distinguera les cas $k = n - 1$, $k = n - M$ et $k \notin \{n - 1, n - M\}$.

(c) En déduire que la loi de G est donnée par : pour tout $k \in G(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(G = k) = \begin{cases} \frac{k}{k+1}pq^k + \frac{1}{k+M}pq^{k+M-1} & \text{si } k \geq 0 \\ \frac{1}{k+M}pq^{k+M-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

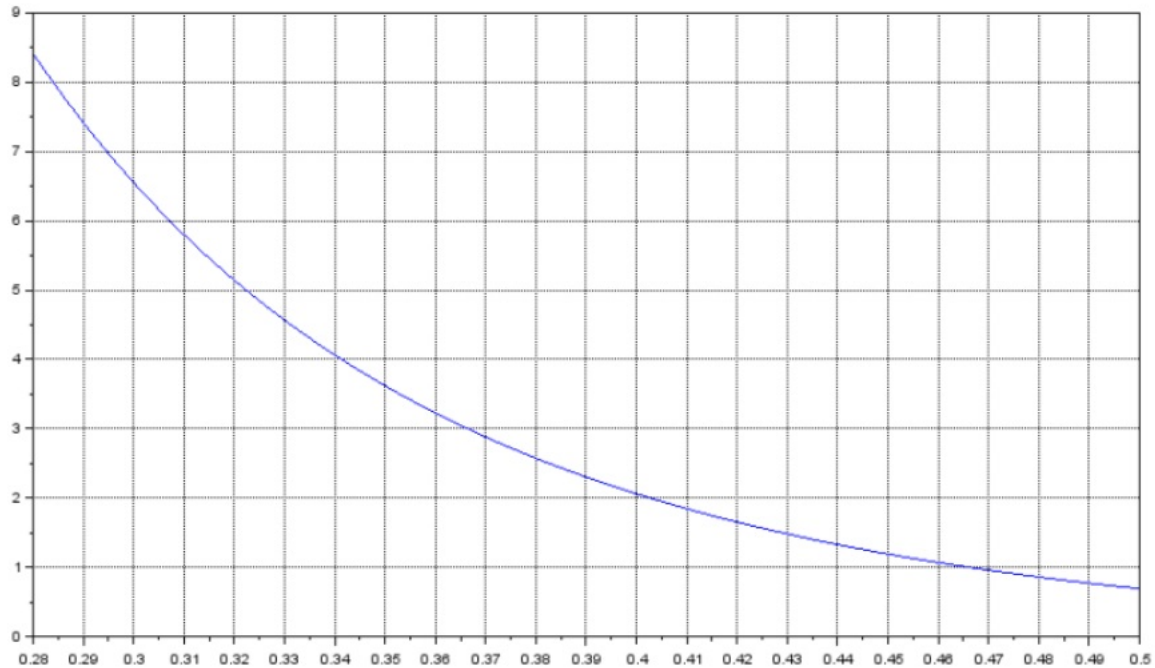
8. Calcul de l'espérance de G .

- (a) Montrer que la série de terme général $\mathbf{E}(G_n) \mathbf{P}(T = n)$ est convergente.
- (b) On admet qu'alors G admet une espérance et

$$\mathbf{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}(G_n) \mathbf{P}(T = n).$$

Calculer $\mathbf{E}(G)$, que l'on exprimera en fonction de p et M uniquement.

9. Voici un extrait de la courbe représentative de la fonction $\psi : p \mapsto \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)}$.



On dira que le jeu est rentable pour l'organisateur lorsque son espérance de gain est positive. Dans les questions suivantes, on justifiera les résultats obtenus.

- (a) Montrer que $\mathbf{E}(G) \geq 0 \implies \psi(p) \geq M - 1$.
- (b) L'organisateur sait que $p = 0,3$. Quelles valeurs de M peut-il choisir pour que le jeu soit rentable ?
- (c) L'organisateur souhaite choisir $M = 8$ euros. Quelle valeur maximale de p doit-on avoir pour que ce jeu reste rentable ?
- (d) Pour quelles valeurs de p le jeu ne peut pas être rentable ?

Partie 3 : Une autre estimation du paramètre

La partie 1 donne un résultat permettant d'approcher la valeur de p par $\frac{S_N}{N}$. On prouve dans cette partie un résultat similaire en utilisant une méthode dite de grandes déviations. On suppose que $p \in]0; \frac{1}{2}[$. Pour $\lambda \geq 0$, on pose

$$h(\lambda) = (1-p)e^{-\lambda p} + pe^{\lambda(1-p)} \quad \text{et} \quad g(\lambda) = \ln h(\lambda).$$

On admet que pour tout $\lambda \geq 0$, on a $g(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2}$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, et on pose $S_N = X_1 + \dots + X_N$ et $\lambda \geq 0$.

10. (a) Montrer que

$$\mathbf{E} \left(e^{\lambda(X_1 - p)} \right) = e^{g(\lambda)}.$$

On justifiera bien le calcul.

(b) En déduire que

$$\mathbf{E} \left(e^{\lambda(S_N - Np)} \right) \leq e^{\frac{N}{2} \lambda^2}.$$

(c) En utilisant l'inégalité de Markov, déduire des questions précédentes que pour $\varepsilon > 0$, et $\lambda > 0$,

$$\mathbf{P} \left(\frac{S_N}{N} - p \geq \varepsilon \right) \leq \exp \left(-N \lambda \varepsilon + \frac{N}{2} \lambda^2 \right).$$

(d) En choisissant bien λ , en déduire que

$$\mathbf{P} \left(\frac{S_N}{N} - p \geq \varepsilon \right) \leq \exp \left(-\frac{N}{2} \varepsilon^2 \right).$$

(e) On admet que l'on pourrait montrer de manière similaire que

$$\mathbf{P} \left(\left| \frac{S_N}{N} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \exp \left(-\frac{N}{2} \varepsilon^2 \right).$$

On souhaite évaluer l'erreur faite en prenant $\frac{S_N}{N}$ comme valeur approchée de p . Expliquer en quoi la majoration ci-dessus est utile pour faire cette évaluation. A quelle condition sur ε et N la méthode des grandes déviations de la partie 3 est-elle plus intéressante que celle de la partie 1 ?

Un raisonnement, même incomplet, interprétant les résultats obtenus sera valorisé.

Fin de l'épreuve