Corrigé - Banque PT - Maths B - 2021
Version pour juniors

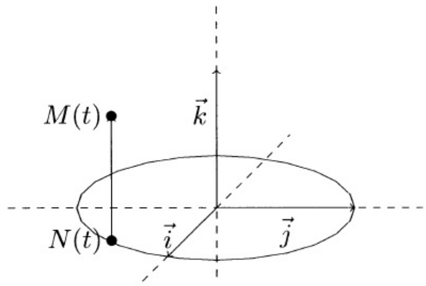
Les réponses en bleu sont les réponses des questions ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Première Partie
Modélisation d'un manège de chevaux de bois.

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle (produit scalaire, norme, ...) et d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Un manège pour enfant est constitué d'un cheval de bois tournant autour de l'axe du manège et animé d'un mouvement vertical.

Ce dispositif est schématisé par la figure ci-contre et on suppose que les coordonnées du point $M(t)$ sont



$$(x(t),y(t),z(t))=\left(\cos(t),\sin(t),\frac{1}{4}\sin^2(t)+\frac{1}{2}\right).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe décrite par l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$.

Pour tout réel t, on appelle vecteur vitesse au point $M(t)$ le vecteur $\overrightarrow{V(t)}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)=(x'(t),y'(t),z'(t))$ et vecteur accélération au point $M(t)$ le vecteur $\overrightarrow{A(t)}=\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t)=(x''(t),y''(t),z''(t))$. On note $V(t)$ et $A(t)$ les normes des vecteurs $\vec{V}(t)$ et $\vec{A}(t)$.

1. (a) Les fonctions x, y et z sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions trigonométriques classiques. Donc $\vec{V}$ existe sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad \vec{V}(t)=\left(-\sin(t),\cos(t),\frac{1}{2}\cos(t)\sin(t)\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\qquad \vec{V}(t)=\left(-\sin(t),\cos(t),\frac{1}{4}\sin(2t)\right).}$$

(b) Soit $t\in\mathbb{R}$. On a :

$$\vec{V}(t)=\vec{0}\qquad\Leftrightarrow\qquad\begin{cases}\sin(t)=0\\ \cos(t)=0\\ \sin(2t)=0\end{cases}\qquad\text{impossible}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\qquad \vec{V}(t)\neq\vec{0}.}$$

(c) On admet que la droite passant par $M(t)$ et de vecteur directeur $\vec{V}(t)$ est la tangente de la courbe $\mathcal{C}$ au point $M(t)$. Soit $t=\frac{\pi}{3}$ et $\mathcal{P}$ le plan normal à la tangente à $\mathcal{C}$ en $M(t)$ et passant par $M(t)$. On

$$M\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right),\sin\left(\frac{\pi}{3}\right),\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{16}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{11}{16}\right).$$

De plus,

$$\vec{V}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

Or $\vec{V}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $M\left(\frac{\pi}{3}\right) \in \mathcal{P}$. Donc pour $N(x, y, z)$ un point de l'espace, on a

$$\begin{aligned}
N \in \mathcal{P} \quad & \Leftrightarrow \quad \left\langle M\left(\frac{\pi}{3}\right)N, \vec{V}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z - \frac{11}{16} \end{bmatrix}, \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right] \right\rangle = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{8}\left(z - \frac{11}{16}\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3}x + y + \frac{\sqrt{3}}{4}z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{11\sqrt{3}}{64} = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{P} : \qquad -\sqrt{3}x + y + \frac{\sqrt{3}}{4}z - \frac{11\sqrt{3}}{64} = 0.}$$

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a les calculs suivants :

$$V(t)^2 = \sin^2(t) + \cos^2(t) + \frac{1}{16}\sin^2(2t) = 1 + \frac{1}{16}\sin^2(2t).$$

De plus, x, y, z étant deux fois dérivables,

$$\vec{A}(t) = \left(-\cos(t), -\sin(t), \frac{1}{2}\cos(2t)\right).$$

Donc

$$A(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) + \frac{1}{4}\cos^2(2t) = 1 + \frac{1}{4}\cos^2(2t).$$

Conclusion,

$$\boxed{V(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{16}\sin^2(2t)} \qquad \text{et} \qquad A(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2(2t)}.}$$

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$1 + \frac{1}{16}\sin^2(2t) \geqslant 1 \qquad \Rightarrow \qquad V(t) \geqslant 1.$$

Donc 1 est un minorant de V. Or on a également

$$\begin{aligned}
V(t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{16}\sin^2(2t) = 1 \quad & \Leftrightarrow \quad \sin(2t) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ 2t = 0 + k\pi \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ t = 0 + \frac{k\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Donc la valeur 1 est atteinte et est donc un minimum. De plus ce minimum est atteint pour tout $t = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Conclusion,

$$\boxed{V(t) \text{ est minimale sur } \left\{\frac{k\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

De même pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + \frac{1}{16}\sin^2(2t) \leqslant 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}$ et donc $V(t) \leqslant \frac{\sqrt{17}}{4}$ et cette valeur est atteinte pour $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sin(2t) = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{V(t) \text{ est maximale sur } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

(c) Puisque

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad A(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\cos^2(2t)},$$

alors on obtient de même $A(t)$ est minimale quand le cosinus s'annule et maximal lorsque le carré du cosinus vaut 1 :

$$A(t) \text{ est minimale sur } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et maximale sur } \left\{ \frac{k\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{V(t) \text{ est minimale lorsque } A(t) \text{ est maximale.}}$$

Autrement dit lorsque $t \in \left\{ \frac{k\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
\vec{V}(t) = \left(-\sin(t), \cos(t), \frac{1}{4}\sin(2t) \right) &= \left(-\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right), 0 \right) \\
&= \begin{cases} (0,1,0) & \text{si } k \in 4\mathbb{Z} \\ (-1,0,0) & \text{si } k \in 4\mathbb{Z}+1 \\ (0,-1,0) & \text{si } k \in 4\mathbb{Z}+2 \\ (1,0,0) & \text{si } k \in 4\mathbb{Z}+3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\begin{cases} \vec{V}(t) \text{ est selon } (Oy) \text{ si } k \text{ est pair} \\ \vec{V}(t) \text{ est selon } (Ox) \text{ si } k \text{ est impair.} \end{cases}}$$

3. Facile. Soit Σ la surface d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$. On calcule,

$$x^2(t) + y^2(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

Donc $M(t) \in \Sigma$. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est incluse dans la surface } \Sigma.}$$

Attention, puisque nous sommes en dimension 3, Σ *n'est pas un cercle... mais un cylindre d'axe* (Oz).

4. Soit Q le plan d'équation $z = 3 - \frac{3}{4}y$.

(a) Non abordable. Vivement l'année prochaine !

(b) On observe que

$$Q : \qquad 3y + 4z = 12.$$

Donc un vecteur *(de* $\mathbb{R}^3$ *!!)* normal de Q est $(0,3,4)$ de norme $\sqrt{9+16} = 5$. Conclusion,

$$\boxed{\vec{n} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ est un vecteur unitaire normal à } Q.}$$

(c) On considère la matrice $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

i. On calcule :

$$PP^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = I_3.$$

On en déduit que P est inversible et de plus $P^{-1} = P^T$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la matrice } P \text{ est orthogonale.}}$$

ii. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice P. On admet que f est une rotation et que donc il existe $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans cette base est donnée par $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$. Déterminons une telle base. Commençons par l'axe de rotation i.e. on cherche l'ensemble des vecteurs invariants. Soit $\vec{u}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad P\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5y = 5x \\ -4x + 3z = 5y \\ 3x + 4z = 5z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ 3z = 9x \\ z = 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ z = 3x \end{cases}.$$

Donc l'ensemble des vecteurs invariants est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$. Posons $\vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{1+1+9}}(1, 1, 3) = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, 3)$, $\vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}(1, -1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ et enfin,

$$\vec{e_3} = \vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \wedge \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

On observe que $\vec{e_3}$ est directement normé. Alors par construction, la famille $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est orthonormée. Montrons qu'elle est libre *(résultat automatique lorsque la famille est orthogonale avec des vecteurs non nuls).* Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_2} = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors,

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1}{\sqrt{11}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} + \frac{3\lambda_3}{\sqrt{22}} = 0 \\ \frac{\lambda_1}{\sqrt{11}} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} + \frac{3\lambda_3}{\sqrt{22}} = 0 \\ \frac{3\lambda_1}{\sqrt{11}} - \frac{2\lambda_3}{\sqrt{22}} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\lambda_1}{\sqrt{11}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{2}} + \frac{3\lambda_3}{\sqrt{22}} = 0 \\ -\frac{2\lambda_2}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{3\lambda_1}{\sqrt{11}} - \frac{2\lambda_3}{\sqrt{22}} = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre et de cardinal $3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. Donc $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Enfin, par construction, $f(e_1) = e_1$ et puisque e_2 et e_3 complète e_1 en une base orthonormée et que f est une rotation, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

avec

$$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right).}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \det(P) &= \frac{1}{5^3} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-5}{125} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{en développant par rapport à } L_1 \\ &= -\frac{1}{25}(-16-9) = 1. \end{aligned}$$

Puis directement $\operatorname{Tr}(P) = \frac{4}{5}$. De plus,

$$f(\overrightarrow{e_2}) = P \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\langle f(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3} \rangle = \left\langle \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{10\sqrt{11}}(-15-12-6) = \frac{33}{10\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{10}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\det(P) = 1, \qquad \langle f(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3} \rangle \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Tr}(P) = \frac{4}{5}.}$$

Posons $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ et $R = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(e_1, e_2, e_3)$ avec $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors, on a $Q = RPR^{-1}$. Donc

$$\det(Q) = \det\left(RPR^{-1}\right) = \det(R)\det(P)\det(R)^{-1} = \det(P) = 1.$$

Or $\det(Q) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Bon tout va bien. D'autre part,

$$\operatorname{Tr}(Q) = \operatorname{Tr}\left(RPR^{-1}\right) = \operatorname{Tr}\left(PRR^{-1}\right),$$

car $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ attention cependant nous n'avons pas $\operatorname{Tr}(AB)$ qui vaut $\operatorname{Tr}(A)$ fois $\operatorname{Tr}(B)$, non, non, non. Ainsi,

$$\operatorname{Tr}(Q) = \operatorname{Tr}(P) = \frac{4}{5}.$$

On dit que le déterminant et la trace sont des invariants de matrices semblables. Or $\operatorname{Tr}(Q) = 1 + 2\cos(\theta)$. Donc

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{10}.$$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{10}\right) + 2k\pi$ ou alors tel que $\theta = 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{10}\right) + 2k\pi$. Enfin,

$$\langle f(\overrightarrow{e_2}), \overrightarrow{e_3} \rangle = \langle \cos(\theta)\overrightarrow{e_2} + \sin(\theta)\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3} \rangle = \sin(\theta) \qquad \text{car } \mathscr{B} \text{ est orthonormée.}$$

Donc

$$\sin(\theta) = \frac{3\sqrt{11}}{10}.$$

On vérifie bien que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Notamment puisque $\sin(\theta) \geqslant 0$, on en déduit que

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \arccos\left(-\frac{1}{10}\right) + 2k\pi.}$$

On pouvait aussi donner $\theta = \pi - \arcsin\left(\frac{3\sqrt{11}}{10}\right) + 2k\pi$.

(d) On note $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{5}\left(-4\vec{j} + 3\vec{k}\right)$, $\vec{v} = \vec{i}$ et $\vec{w} = \frac{1}{5}\left(3\vec{j} + 4\vec{k}\right)$. Allez hop, c'est reparti pour un tour. On a

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{5}\left(-4\left\langle \vec{j}, \vec{i} \right\rangle + 3\left\langle \vec{k}, \vec{j} \right\rangle\right) = 0$$

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \frac{1}{25}\left(-12\left\langle \vec{i}, \vec{i} \right\rangle - 16\left\langle \vec{j}, \vec{k} \right\rangle + 9\left\langle \vec{j}, \vec{k} \right\rangle + 12\left\langle \vec{k}, \vec{k} \right\rangle\right) = \frac{1}{25}(-12 + 12) = 0$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{1}{5}\left(3\left\langle \vec{i}, \vec{j} \right\rangle + 4\left\langle \vec{i}, \vec{k} \right\rangle\right) = 0.$$

Donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthogonale. De plus,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{16+9}{25}} = 1, \qquad \|\vec{v}\| = \left\|\vec{i}\right\| = 1, \qquad \|\vec{w}\| = \sqrt{\frac{9+16}{25}} = 1.$$

Donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orthonormée. Montrons qu'elle est libre *(automatique dans le cas d'une famille orthonormée)*. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Alors, par unicité des coordonnées dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$,

$$\begin{cases} b = 0 \\ -\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}c = 0 \\ \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ -\frac{4}{5}a + \frac{3}{5}c = 0 \\ \frac{16+9}{5}c = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow 4L_3 + 3L_2.$$

Donc on obtient bien $a = b = c = 0$. Donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre. De plus son cardinal vaut $3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. Donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base. Conclusion,

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base orthonormée directe.}}$$

(e) On note Ω le point de coordonnées $(0, 0, 3)$ dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Soit M un point de $\mathbb{R}^3$. On note (x, y, z) ses coordonnées dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, (x_1, y_1, z_1) ses coordonnées dans le repère $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ et (X, Y, Z) ses coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

i. Par définition, on a

$$\begin{aligned} M &= \Omega + X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{w} \\ &= O + \overrightarrow{O\Omega} + X \times \frac{1}{5}\left(-4\vec{j} + 3\vec{k}\right) + Y\vec{i} + Z \times \frac{1}{5}\left(3\vec{j} + 4\vec{k}\right) \\ &= O + 3\vec{k} + Y\vec{i} + \frac{3Z - 4X}{5}\vec{j} + \frac{3X + 4Z}{5}\vec{k} \\ &= O + Y\vec{i} + \frac{3Z - 4X}{5}\vec{j} + \frac{3X + 4Z + 15}{5}\vec{k}. \end{aligned}$$

Par unicité des coordonnées dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on en déduit que

$$\begin{cases} x = Y \\ y = \frac{3Z - 4X}{5} \\ z = \frac{3X + 4Z + 15}{5}. \end{cases}$$

Ou encore,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.}$$

ii. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{BT} : \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 - \frac{3}{4}y \end{cases} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Y^2 + \frac{(3Z-4X)^2}{25} = 1 \\ \frac{3X+4Z+15}{5} = 3 - \frac{3}{4}\frac{3Z-4X}{5} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Y^2 + \frac{(3Z-4X)^2}{25} = 1 \\ 3X + 4Z = -\frac{9}{4}Z + 3X \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Y^2 + \frac{16X^2}{25} = 1 \\ Z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, une représentation cartésienne de la courbe $\mathcal{BT}$ dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{BT} : \quad \begin{cases} 16X^2 + 25Y^2 = 25 \\ Z = 0. \end{cases}}$$

iii. Non abordable : c'est une ellipse !

5. Soient $\Delta : \begin{cases} x = z \\ y = 1 + z \end{cases}$ et M_0 le point d'intersection de Δ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 3$. Notons $\mathcal{C}$ le cercle de $\mathcal{P}$ d'axe (Oz) et passant par M_0. On note donc que $\mathcal{C}$ est de centre $I\,(x_I, y_I, z_I)$ le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec (Oz). On a

$$I \in \mathcal{P} \cap (Oz) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_I = 3 \\ x_I = y_I = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad I = \Omega\,(0,0,3)\,.$$

Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M_0 dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Puisque $M_0 \in \Delta \cap \mathcal{P}$. On a

$$\begin{cases} x_0 = z_0 \\ y_0 = 1 + z_0 \\ z_0 = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 4 \\ z_0 = 3 \end{cases}.$$

Donc $M_0\,(3,4,3)$. Puisque Ω est le centre du cercle et que $M_0 \in \mathcal{C}$ alors $\mathcal{C}$ est de rayon

$$R = \Omega\, M_0 = \|(3,4,0)\| = \sqrt{9+16} = 5.$$

Ainsi, une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{C} : \quad \begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ z = 3. \end{cases}}$$

6. Non abordable.

7. Non abordable.

Deuxième Partie

Modélisation d'un deuxième manège pour enfant.

Le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. *Question préliminaire. Des cadeaux, cela ne se refuse pas !* Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z.

   (a) On a directement,
$$\boxed{r_\theta(z) = \mathrm{e}^{i\,\theta}\, z.}$$

   (b) Toujours par le cours, on a aussi,
$$\boxed{h_a(z) = az.}$$

   (c) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a
$$r_\theta \circ h_a(z) = r_\theta(az) = \mathrm{e}^{i\,\theta}(az) = a\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\, z = h_a\left(\mathrm{e}^{i\,\theta}\, z\right) = h_a \circ r_\theta(z)\,.$$
   Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$, on obtient que
$$\boxed{r_\theta \circ h_a = h_a \circ r_\theta.}$$
   On note alors $f_{a,\theta} = r_\theta \circ h_a$.

2. *Formules de trigonométrie. Encore plus de cadeaux ! C'est Noël.* On considère 4 réels a, b, p et q.

   (a) Hop ! hop ! hop ! Par le cours, on a

   (1) $$\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2},}$$

   (2) $$\boxed{\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2},}$$

   (3) $$\boxed{\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.}$$

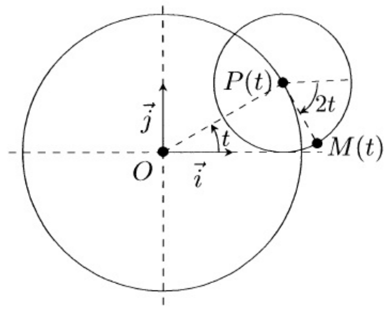
   (b) Ici, on demande la démonstration. Soient $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Posons $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$ i.e. $p = a + b$ et $q = a - b$. Alors par (3) de la question précédente,
$$\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{\cos(q) - cos(p)}{2}.$$
   Conclusion,
$$\boxed{\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right).}$$
   De même par la question (2)
$$\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{\sin(p) + \sin(q)}{2}.$$
   Conclusion,
$$\boxed{\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).}$$

3. Un manège pour enfant est constitué d'une plateforme tournant autour d'un axe, lui même animé d'un mouvement circulaire.

Ce dispositif est schématisé par la figure ci-contre et les mouvements des points $P(t)$ et $M(t)$ sont donnés par :

- L'affixe complexe du point $P(t)$ est $2\,\mathrm{e}^{it}$;
- L'affixe complexe du vecteur $\overrightarrow{P(t)M(t)}$ est e^{-2it}.

On note $z(t)$ l'affixe complexe du point $M(t)$ et Γ la courbe décrite par l'ensemble des points $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.



(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Puisque l'affixe de $P(t)$ est $2\,\mathrm{e}^{it}$, alors celle de $\overrightarrow{P(t)M(t)}$ est $z(t) - 2\,\mathrm{e}^{it}$. Or cette affixe vaut aussi e^{-2it}. Donc

$$\boxed{z(t) = \mathrm{e}^{-2it} + 2\,\mathrm{e}^{it}.}$$

En conséquence, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\,(z(t)) = \cos(-2t) + 2\cos(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) &= \mathrm{Im}\,(z(t)) = \sin(-2t) + 2\sin(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)\,. \end{aligned}$$

Conclusion, une équation paramétrique de Γ est

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $z'(t)$ l'affixe de $r_{\frac{2\pi}{3}}(M(t))$. Par la question préliminaire, on a

$$z'(t) = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} z(t) = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \left(\mathrm{e}^{-2it} + 2\,\mathrm{e}^{it}\right).$$

De plus, l'affixe de $M\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$ vaut :

$$\begin{aligned} z\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{-2it - i\frac{4\pi}{3}} + 2\,\mathrm{e}^{it + i\frac{2\pi}{3}} &= \mathrm{e}^{-2it - i\frac{4\pi}{3} + 2i\pi} + 2\,\mathrm{e}^{it + i\frac{2\pi}{3}} \\ &= \mathrm{e}^{-2it + i\frac{2\pi}{3}} + 2\,\mathrm{e}^{it + i\frac{2\pi}{3}} \\ &= \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} \left(\mathrm{e}^{-2it} + 2\,\mathrm{e}^{it}\right) = z'(t). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad r_{\frac{2\pi}{3}}(M(t)) = M\left(t + \frac{2\pi}{3}\right).}$$

Conclusion,

$$\boxed{\Gamma \text{ est invariante par la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{2\pi}{3}.}$$

(c) Par la question précédente, il suffit de connaître Γ sur un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{3}$, on construit alors le reste de la courbe par deux rotations de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, jusqu'à obtenir un intervalle de longueur 2π, ce qui suffit à décrire complètement Γ car $t \mapsto \sin(2t)$, $t \mapsto \cos(2t)$, cos, sin sont 2π-périodiques et donc il en va de même pour z. On fixe donc pour intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$. Il est encore possible de couper cet intervalle en deux :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x(-t) = 2\cos(-t) + \cos(-2t) = x(t) \\ y(-t) = 2\sin(-t) - 2\sin(-t) = -y(t). \end{cases}$$

Donc connaissant $M(t)$, on en déduit $M(-t)$ par la symétrie axiale d'axe (Ox). Conclusion, il suffit d'étudier Γ sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ puis l'on effectue une symétrie d'axe (Ox) et deux rotations de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

(d) La fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions trigonométriques qui le sont. De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x'(t) = -2\sin(t) - 2\sin(2t).$$

En développant, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x'(t) = -2\sin(t) - 4\sin(t)\cos(t) = -2\sin(t)\left(1 + 2\cos(t)\right).$$

D'autre part, en factorisant avec $p = t$ et $q = 2t$, par le préliminaire, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x'(t) = -2\left(\sin(t) + \sin(2t)\right) = -4\sin\left(\frac{t+2t}{2}\right)\cos\left(\frac{t-2t}{2}\right) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x'(t) = -2\sin(t)\left(1 + 2\cos(t)\right) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right).}$$

(e) De même, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, en développant, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 2\cos(t) - 2\left(2\cos^2(t) - 1\right) = -4\cos^2(t) + 2\cos(t) + 2.$$

Or on a bien

$$2\left(1 - \cos(t)\right)\left(1 + 2\cos(t)\right) = 2 + 4\cos(t) - 2\cos(t) - 4\cos^2(t) = -4\cos^2(t) + 2\cos(t) + 2.$$

D'où,

$$y'(t) = 2\left(1 - \cos(t)\right)\left(1 + 2\cos(t)\right).$$

D'autre part, par la question préliminaire en prenant $p = t$ et $q = 2t$, on a

$$\begin{aligned} y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 2\left(\cos(t) - \cos(2t)\right) &= 2(-2)\sin\left(\frac{t+2t}{2}\right)\sin\left(\frac{t-2t}{2}\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{y'(t) = 2\left(1 - \cos(t)\right)\left(1 + 2\cos(t)\right) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right).}$$

(f) Soit $t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, on a alors $0 \leqslant \frac{t}{2} \leqslant \frac{3t}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Donc $\sin\left(\frac{3t}{2}\right) \geqslant 0$, $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant 0$, $\sin\left(\frac{3t}{2}\right) \geqslant 0$, $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant 0$. D'où,

$$x'(t) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad y'(t) \geqslant 0.$$

Donc la fonction x est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et y croissante. De plus,

$$x(0) = 2\cos(0) + \cos(0) = 3, \qquad x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y(0) = 2\sin(0) - \sin(0) = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Conclusion,

t	0	$\frac{\pi}{3}$
x	3 $\searrow$	$\frac{1}{2}$
y	0 $\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(g) Le point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. De plus, par ce qui précède,

$$x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\sqrt{3}\,(1+1) = -2\sqrt{3}$$
$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)(1+1) = 2.$$

Donc $\vec{V}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ a pour coordonnées $\left(-2\sqrt{3}, 2\right)$ et est colinéaire au vecteur $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$. Ainsi, une équation paramétrique de la tangente $\mathcal{T}$ à Γ au point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \lambda\sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda \end{cases}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Or on a

$$\exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \lambda\sqrt{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \lambda \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3} \\ \lambda = y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad x + \sqrt{3}y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2.$$

Conclusion, une équation cartésienne de la tangente est

$$\boxed{\mathcal{T}: \qquad x + \sqrt{3}y = 2.}$$

De plus en prenant $x = 2$ et $y = 0$, on a $2+0+2$, donc $\boxed{\text{cette tangente } \mathcal{T} \text{ passe bien par } A\,(2,0)}$.

(h) On a,

$$x(t) - x(0) = 2\cos(t) + \cos(2t) - 3.$$

Donc par le développement limité en 0 du cosinus,

$$x(t) - x(0) \underset{t\to 0}{=} 2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right) + \left(1 - \frac{4t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right) - 3 \underset{t\to 0}{=} -3t^2 + o\left(t^2\right).$$

Donc $x(t) - x(0) \underset{t\to 0}{\sim} -3t^2$. De même,

$$y(t) - y(0) = 2\sin(t) - \sin(2t) - 0 \underset{t\to 0}{=} 2\left(t - \frac{t^3}{6} + o\left(t^3\right)\right) - \left(2t - \frac{8t^3}{6} + o\left(t^3\right)\right) \underset{t\to 0}{=} t^3 + o\left(t^3\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{x(t) - x(0) \underset{t\to 0}{\sim} -3t^2 \qquad \text{et} \qquad y(t) - y(0) \underset{t\to 0}{\sim} t^3.}$$

(i) On rappelle que pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, on a

$$\begin{cases} x'(t) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ y'(t) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right). \end{cases}$$

Donc pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$,

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{V(t)}\right\| &= \sqrt{16\sin^2\left(\frac{3t}{2}\right)\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 16\sin^2\left(\frac{3t}{2}\right)\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= 4\left|sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right|\sqrt{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right), \end{aligned}$$

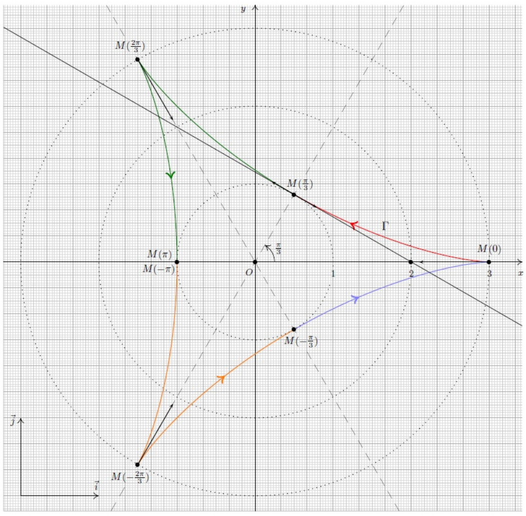
car pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, $\frac{3t}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\sin\left(\frac{3t}{2}\right) \geqslant 0$. Ainsi, la longueur recherchée vaut

$$\ell = 6\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\mathrm{d}t = 24\left[-\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{3}} = -16\,(0-1) = 8.$$

Conclusion, la longueur de Γ vaut

$$\boxed{\ell = 16.}$$

(j) On obtient la figure suivante :



4. Développée de Γ

(a) Non abordable.
On note Γ_1 la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 6\cos(t) - 3\cos(2t) \\ y = 6\sin(t) + 3\sin(2t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et $I(t)$ désigne le point de Γ_1 de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. l'affixe complexe de $M(t)$ est

$$z(t) = x(t) + iy(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) + i\,(2\sin(t) - \sin(2t)).$$

Donc pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $a \in \mathbb{R}$, l'affixe de $f_{\theta,a}\left(M(t)\right)$ vaut

$$\begin{aligned} z'(t) &= a\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\,z(t) \\ &= a\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(2\cos(t)+\cos(2t)+i\left(2\sin(t)-\sin(2t)\right)\right) \\ &= a\frac{2\cos(t)+\cos(2t)-2\sqrt{3}\sin(t)+\sqrt{3}\sin(2t)}{2} \\ &\qquad + ia\frac{2\sqrt{3}\cos(t)+\sqrt{3}\cos(2t)+2\sin(t)-\sin(2t)}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, l'affixe de $I\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$ est donnée par

$$\begin{aligned} z_I\left(t+\frac{\pi}{3}\right) &= 6\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)-3\cos\left(2t+\frac{2\pi}{3}\right)+i\left(6\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\left(2t+\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 3\cos(t)-3\sqrt{3}\sin(t)+\frac{3}{2}\cos(2t)+\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin(2t) \\ &\qquad + i\left(3\sin(t)+3\sqrt{3}\cos(t)-\frac{3}{2}\sin(2t)+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos(2t)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $a=3$, on obtient que $z'(t)=z_I(t)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Pour } a=3 \text{ et } \theta=\frac{\pi}{3}, \text{ on a} \qquad f_{\theta,a}\left(M(t)\right)=I\left(t+\frac{\pi}{3}\right).}$$

(c) Pour construire Γ_1, il suffit de partir de Γ de lui appliquer la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ puis l'homothétie de centre O et de coefficient 3 (ou l'inverse : l'homothétie puis la rotation !). On obtient alors la courbe Γ_1. *Le décalage de $\frac{\pi}{3}$ dans I modifie juste le paramétrage de la courbe et non la courbe elle-même.*

(d) Soient $t \neq 0\left[\frac{\pi}{3}\right]$ et $t' \neq 0\left[\frac{\pi}{3}\right]$.

i. La tangente à Γ en $M(t)$ et la tangente à Γ en $M(t')$ sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{V(t)}\,(x'(t),y'(t))$ est orthogonal à $\overrightarrow{V(t')}\,(x'(t'),y'(t'))$ si et seulement si

$$\begin{aligned} &\left\langle \overrightarrow{V(t)},\overrightarrow{V(t')}\right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x'(t)x'(t')+y'(t)y'(t')=0 \\ \Leftrightarrow\ & 16\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t'}{2}\right)\cos\left(\frac{t'}{2}\right)+16\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t'}{2}\right)\sin\left(\frac{t'}{2}\right)=0 \end{aligned}$$

Or $t\neq 0\left[\frac{\pi}{3}\right]$ donc $\frac{3t}{2}\neq 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\neq 0$ et de même $\sin\left(\frac{3t'}{2}\right)\neq 0$. D'où

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{V(t)},\overrightarrow{V(t')}\right\rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t'}{2}\right)+\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t'}{2}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{t-t'}{2}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{t-t'}{2}=-\frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \quad t'=t+\pi\ [2\pi]. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les tangentes sont orthogonales si et seulement si } t'=t+\pi\,[2\pi].}$$

ii. Non abordable.