

# Epreuve de mathématiques 11

## 2025-2026

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé*  
*Durée : 4h*

*Encadrer les résultats et numérotter les copies*



## Problème 1 - Variables aléatoires

Une urne contient  $N \geq 2$  boules distinctes numérotées de 1 à  $N$ . On effectue successivement et avec remise des tirages dans l'urne. On fixe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$  sur lequel on définit toutes nos variables aléatoires. Au tirage  $n$ , on note  $Z_n$  la variable aléatoire retournant 1 si le numéro tiré n'a jamais été pioché avant et 0 sinon. On note également  $Y_n$  le nombre de numéros **distincts** obtenus durant les  $n$  premiers tirages. On pose par convention  $Y_0 = 0$  et on note que  $Z_1 = Y_1 = 1$ .

### Partie 1 : Lois initiales

1. Déterminer la loi de  $Z_2$ .
2. Exprimer  $Y_2$  en fonction de  $Z_2$  et en déduire la loi de  $Y_2$ .
3. (a) Ecrire l'évènement  $(Y_2 = 1, Y_3 = 1)$  en fonction de  $Y_2$  et  $Z_3$ .  
(b) En déduire  $\mathbb{P}(Y_2 = 1, Y_3 = 1)$ .
4. Calculer la loi conjointe de  $Y_2$  et  $Y_3$ .
5. Vérifier que la loi marginale de  $Y_3$  est donnée par

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y_3 = k)$	$\frac{1}{N^2}$	$\frac{3(N-1)}{N^2}$	$\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}$

6. Préciser l'espérance de  $Y_3$ .
7. Calculer la covariance de  $Y_2$  et  $Y_3$ .
8. Les variables  $Y_2$  et  $Y_3$  sont-elles indépendantes ?

### Partie 2 : Loi de $Z_n$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $m = \min(n, N)$ .

9. Justifier que  $Y_n(\Omega) \subseteq \llbracket 1; m \rrbracket$ .
10. Soit  $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$ , calculer  $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1 \mid Y_n = k)$ .
11. En déduire que  $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N}\mathbb{E}(Y_n)$ .
12. Donner une expression de  $Y_n$  en fonction de  $Z_1, \dots, Z_n$ .
13. En déduire une expression de  $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1)$  en fonction de  $N$  et des  $\mathbb{P}(Z_k = 1)$  pour  $k$  entre 1 et  $n$ .
14. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$ .

### Partie 3 : Autour de $Y_N$

15. Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{E}(Y_n)$ . Vérifier la cohérence avec la question 6.
16. Montrer que  $\mathbb{E}(Y_N) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} N \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  le nombre de numéros encore jamais pioché durant les étapes 1 à  $n$ .

17. Exprimer  $X_N$  en fonction de  $N$  et  $Y_N$ .
18. Justifier qu'il existe  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $N \geq N_0$ ,  $\frac{\mathbb{E}(X_N)}{N} \leq \frac{1}{2}$ .
19. En déduire que pour tout  $N \geq N_0$ ,  $\mathbb{P}\left(Y_N \leq \frac{N}{3}\right) \leq \frac{3}{4}$ .

### Partie 4 : Par les fonctions génératrices

On fixe à nouveau  $N \geq 2$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $G_n$  la fonction génératrice de  $Y_n$ .

20. Préciser  $G_0$ ,  $G_1$  et  $G_2$ .

21. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \frac{k}{N} \mathbb{P}(Y_n = k) + \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) \mathbb{P}(Y_n = k-1).$$

22. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$G_{n+1}(t) = \frac{1-t}{N} \sum_{k=1}^N kt^k \mathbb{P}(Y_n = k) + \sum_{k=0}^N t^{k+1} \mathbb{P}(Y_n = k).$$

23. En déduire que

$$G_{n+1}(t) = \frac{1}{N} t(1-t) G'_n(t) + t G_n(t).$$

24. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}(Y_n) + 1$ .

25. Retrouver alors le résultat de la question 15.

## Problème 2 - Géométrie

Ce problème est composé de deux parties indépendantes.

### Partie 1 : Géométrie du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les quatre points  $A(-1, -1)$ ,  $B(3, -1)$ ,  $C(3, 3)$  et  $D(-1, 3)$ . On notera  $G$  le milieu de  $[AD]$ .

1. Faire une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
2. Montrer que  $ABCD$  est un carré.
3. Déterminer les coordonnées de  $G$ .
4. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points  $M$  du plan tel que  $\|2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{AB}\|$ . Montrer que  $\mathcal{E}$  admet pour équation

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0.$$

5. Reconnaître l'ensemble  $\mathcal{E}$ .
6. Soit  $\mathcal{C}$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . Préciser les coordonnées de  $\Omega$  le centre de  $\mathcal{C}$ .
7. Calculer  $R$  le rayon de  $\mathcal{C}$  et donner une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$ .
8. Déterminer l'intersection de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{C}$ .
9. Soit  $H(-3 - 2\sqrt{2}, 1)$ . Calculer la distance de  $H$  à  $(GB)$ .
10. Calculer la distance de  $H$  à  $\mathcal{C}$ .

Soient  $d_1$  et  $d_2$  les deux tangentes à  $\mathcal{C}$  passant par  $H$ . On note  $I_1$  le point d'intersection de  $d_1$  avec  $\mathcal{C}$  et  $I_2$  celui de  $d_2$  avec  $\mathcal{C}$ .

11. Déterminer  $I_1$  et  $I_2$ .

Réponse :  $\left(-3 + 2\sqrt{2}, 1 + 4\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right)$  et  $\left(-3 + 2\sqrt{2}, 1 - 4\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right)$ .

12. Déterminer une équation cartésienne et des équations paramétriques de  $d_1$  et de  $d_2$ .

13. Montrer que  $d_1$  et  $d_2$  sont tangentes à  $\mathcal{E}$ .

### Partie 2 : Géométrie de l'espace

Dans  $\mathcal{E}$  l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère les points  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(2, 3, 1)$ ,  $C(3, 2, 1)$ ,  $D(-1, 0, 1)$  et on note  $\Delta$  la droite d'équation 
$$\begin{cases} x = z + 2 \\ y = 2x - 4 \end{cases} .$$

14. Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des points équidistants de  $A$  et  $B$ .

(a) Déterminer les coordonnées de  $I$  le point milieu du segment  $[AB]$ .

(b) Développer et simplifier  $\|\vec{AI} + \vec{IM}\|^2 - \|\vec{BI} + \vec{IM}\|^2$ .

(c) En déduire que  $\mathcal{P}$  est un plan dont on précisera une équation cartésienne puis un point et un vecteur normal à  $\mathcal{P}$ .

(d) Déterminer une équation paramétrique de  $\mathcal{P}$ .

15. Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{D}$  l'ensemble des points équidistants de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

16. Préciser un point, un vecteur et une équation paramétrique de  $\mathcal{D}$ .

17. Déterminer le centre  $\Omega$  et le rayon  $R$  de  $\mathcal{S}$  la sphère circonscrite au tétraèdre  $ABCD$ . En déduire son équation cartésienne.

18. Calculer  $\vec{n}$  un vecteur normal à  $(ABC)$ . En déduire une équation cartésienne de  $(ABC)$ .

19. Retrouver une équation cartésienne de  $(ABC)$  par un calcul de déterminant.

20. Déterminer une équation paramétrique de  $(ABC) \cap \mathcal{P}$ .

21. Calculer la distance de  $\Omega$  à  $(ABC)$ .

22. Déterminer un point et un vecteur de  $\Delta$ .

23. Les droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}$  sont-elles coplanaires ?

24. Calculer la distance de  $\Omega$  à  $\Delta$ .

25. Soit  $\mathcal{S}'$  la sphère passant par  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et tangente à  $\Delta$ . Déterminer  $\Omega'$  son centre et  $R'$  son rayon puis en donner une équation cartésienne.

26. Déterminer la nature de l'intersection de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  puis en déterminer ses éléments caractéristiques.

**FIN**