Commentaires du DS11
Variables aléatoires et géométrie

Index des raccourcis :

- TB : très bien
- AE : à encadrer
- NJ : non justifié
- PC : pas clair
- Pq ? : pourquoi ?
- D ? : Dérivabilité ?
- VND : Variable non définie
- H ? : Hypothèse(s) ?

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{60}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1.4	P1	P2.1	P2.2	P2	Total	Note finale
Moyenne	-1	5,5	1,5	0,4	0,6	7,9	11,3	5,3	16,6	23,5	8,7
Sur		21	14	12	13	60	28	32	60	120	20

TOTAL : 120 pt

Problème I - Variables aléatoires 60 pt

Une urne contient $N \geqslant 2$ boules distinctes numérotées de 1 à N. On effectue successivement et avec remise des tirages dans l'urne. On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sur lequel on définit toutes nos variables aléatoires. Au tirage n, on note Z_n la variable aléatoire retournant 1 si le numéro tiré n'a jamais été pioché avant et 0 sinon. On note également Y_n le nombre de numéros **distincts** obtenus durant les n premiers tirages. On pose par convention $Y_0 = 0$ et on note que $Z_1 = Y_1 = 1$.

Partie 1 : Lois initiales 21 pt

1. **2 pt** Déterminer la loi de Z_2.

   Plusieurs bonnes réponses mais trop de confusions. J'ai vu aussi bien des uniformes que des binomiales. Même parmi ceux qui donnent bien une loi de Bernoulli, il faut la justifier proprement, pourquoi cela suit-il une loi de Bernoulli et que vaut son paramètre (dont la valeur est aussi à justifier).

2. **2+2 pt** Exprimer Y_2 en fonction de Z_2 et en déduire la loi de Y_2.

   Aucune réponse ne donne la valeur $Z_2 + 1$ attendue mais j'ai mis des points lorsque l'on donnait les différentes valeurs de Y_2 en fonction de celle de Z_2. Attention dans un premier temps à donner les valeurs plutôt que les évènements ! Pas beaucoup de bonnes réponses finalement pour Y_2 alors que la question reste facile. Plusieurs ont cru y voir une loi de Bernoulli ce qui est faux car l'univers image n'est pas le bon.

3. (a) **2 pt** Ecrire l'évènement $(Y_2 = 1, Y_3 = 1)$ en fonction de Y_2 et Z_3.
   Barème généreux mais très peu justifient leur réponse malheureusement.

   (b) **2 pt** En déduire $\mathbb{P}(Y_2 = 1, Y_3 = 1)$.
   Je ne crois pas avoir vu de bonne réponse. Vous avez tous invoqué que $(Z_3 = 0)$ et $(Y_2 = 1)$ sont indépendants, ce qui n'est pas du tout le cas. Un résultat juste permettait cependant d'obtenir la question suivante.

4. **2 pt** Calculer la loi conjointe de Y_2 et Y_3.
   Moins de justifications ici sont attendus vu que les arguments devaient être donnés dans la question précédente. Quelques succès complet. Certains n'ont pas eu le bon raisonnement à la question précédente mais obtiennent le bon résultat et dans ci cas présent, les points.

5. **2 pt** Vérifier que la loi marginale de Y_3 est donnée par

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y_3 = k)$	$\frac{1}{N^2}$	$\frac{3(N-1)}{N^2}$	$\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}$

   Quelques parachutages du style « grâce à la question précédent, ça marche. » On ne pouvait pas juste dire que l'énoncé est correct. Pour obtenir les points à cette question, il était nécessaire de parler de la formule des probabilités totales. Quelques belles réponses.

6. **2 pt** Préciser l'espérance de Y_3.
   Bien globalement. Quelques erreurs de calcul toujours mais la principale erreur est de commencer les calculs sans donner la formule théorique. N'oubliez pas non plus de préciser que vous utilisez la question précédente.

7. **3 pt** Calculer la covariance de Y_2 et Y_3.
   La définition est sue mais son calcul par le théorème de transfert non. A bien revoir. Question que l'on ne pouvait traiter que si l'on avait réussi la loi conjointe.

8. **2 pt** Les variables Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?
   Des réponses pas toujours claires. On pouvait admettre que $\mathrm{Cov}(Y_2, Y_3) \neq 0$ cela donnait les points mais il fallait le faire explicitement. Quelques-uns démontrent bien la non-indépendance en utilisant les probabilités.

Partie 2 : Loi de Z_n **60 pt**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $m = \min(n, N)$.

9. **2 pt** Justifier que $Y_n(\Omega) \subset [\![1; m]\!]$.
   Plusieurs réponses claires et d'autres ou je ne comprends pas le sens de ce qui est écrit ou en quoi cela répond à la question.

10. **2 pt** Soit $k \in [\![1; m]\!]$, calculer $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1 \mid Y_n = k)$.
    Pas de calcul ici, juste une explication. Certains ont voulu repasser par l'intersection, cela ne fonctionnait pas. D'ailleurs plusieurs confondent l'intersection $\mathbb{P}(A, B)$ et le conditionnement $\mathbb{P}(A \mid B)$.

11. **2 pt** En déduire que $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N}\mathbb{E}(Y_n)$.
    Une ou deux belles réponses.

12. **2 pt** Donner une expression de Y_n en fonction de $Z_1, \ldots, Z_n$.
    Assez facile mais très peu traitée. Quelques réponses correctes.

13. **3 pt** En déduire une expression de $\mathbb{P}(Z_{n+1}=1)$ en fonction de N et des $\mathbb{P}(Z_k=1)$ pour k entre 1 et n.

    Une belle réponse.

14. **3 pt** En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z_n=1)=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}$.

    Idem.

Partie 3 : Autour de Y_N **60 pt**

15. **2+2 pt** Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y_n)$. Vérifier la cohérence avec la question 6.

    Une seule réponse juste.

16. **2 pt** Montrer que $\mathbb{E}(Y_N)\underset{N\to+\infty}{\sim} N\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

    Aucune bonne réponse.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n le nombre de numéros encore jamais pioché durant les étapes 1 à n.

17. **2 pt** Exprimer X_N en fonction de N et Y_N.

    Facile quelques personnes le voient et en profitent.

18. **2 pt** Justifier qu'il existe $N_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $N\geqslant N_0$, $\frac{\mathbb{E}(X_N)}{N}\leqslant\frac{1}{2}$.

    Non réussie.

19. **2 pt** En déduire que pour tout $N\geqslant N_0$, $\mathbb{P}\left(Y_N\leqslant\frac{N}{3}\right)\leqslant\frac{3}{4}$.

    Non réussie.

Partie 4 : Par les fonctions génératrices **60 pt**

On fixe à nouveau $N\geqslant 2$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note G_n la fonction génératrice de Y_n.

20. **2 pt** Préciser G_0, G_1 et G_2.

    Attention à G_0 sinon plusieurs réponses exactes.

21. **2 pt** Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k\in[\![0;N]\!]$,

$$\mathbb{P}(Y_{n+1}=k)=\frac{k}{N}\mathbb{P}(Y_n=k)+\left(1-\frac{k-1}{N}\right)\mathbb{P}(Y_n=k-1).$$

    Deux ou trois bonnes réponses.

22. **3 pt** Soient $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$. Montrer que

$$G_{n+1}(t)=\frac{1-t}{N}\sum_{k=1}^{N}kt^k\mathbb{P}(Y_n=k)+\sum_{k=0}^{N}t^{k+1}\mathbb{P}(Y_n=k).$$

    Idem.

23. **2 pt** En déduire que

$$G_{n+1}(t)=\frac{1}{N}t(1-t)G_n'(t)+tG_n(t).$$

    Une ou deux bonnes réponses.

24. **2 pt** En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Y_{n+1})=\left(1-\frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(Y_n)+1$.

    Idem.

25. **2 pt** Retrouver alors le résultat de la question 15.

    Non traitée.

Problème II - Géométrie 60 pt

Ce problème est composé de deux parties indépendantes.

Partie 1 : Géométrie du plan 28 pt

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les quatre points $A(-1,-1)$, $B(3,-1)$, $C(3,3)$ et $D(-1,3)$. On notera G le milieu de $[AD]$.

1. **3 pt** Faire une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

   Question généreusement dotée, plutôt bien abordée même si le dessin n'est souvent pas complet. Deux points si la figure représentait correctement le carré et les deux cercles.

2. **2 pt** Montrer que $ABCD$ est un carré.

   De bonnes réponses et des confusions. Plusieurs démontrent des propriétés permettant uniquement de démontrer qu'$ABCD$ est un losange ou un rectangle ou même juste un parallélogramme.

3. **1 pt** Déterminer les coordonnées de G.

   Facile, bien réussie.

4. **2 pt** Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tel que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Montrer que $\mathcal{E}$ admet pour équation
   $$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0.$$

   Sans souci, à quelques petites erreurs de calcul près, la question a été bien réussie.

5. **2 pt** Reconnaître l'ensemble $\mathcal{E}$.

   Bien également.

6. **2 pt** Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Préciser les coordonnées de Ω le centre de $\mathcal{C}$.

   Plus de mal sur la définition du cercle circonscrit. Peu connaissent cette définition et seule une poignée pensent à aller chercher le milieu de l'hypoténuse dans le triangle rectangle ABC.

7. **3 pt** Calculer R le rayon de $\mathcal{C}$ et donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

   Bien réussie à partir du moment où l'on avait réussie la question précédente.

8. **2 pt** Déterminer l'intersection de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$.

   Idem. J'ai fait quelques fois autre chose qu'un pivot, et cela marche beaucoup moins bien.

9. **2 pt** Soit $H\left(-3-2\sqrt{2}, 1\right)$. Calculer la distance de H à (GB).

   Peu de bonnes réponses. Beaucoup de confusions entre la dimension 2 et 3. Seuls deux ou trois pensent à faire un dessin.

10. **2 pt** Calculer la distance de H à $\mathcal{C}$.

    Là aussi une poignée seulement de réponses correctes. Il fallait naturellement avoir le rayon et le centre de $\mathcal{C}$.

Soient d_1 et d_2 les deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par H. On note I_1 le point d'intersection de d_1 avec $\mathcal{C}$ et I_2 celui de d_2 avec $\mathcal{C}$.

11. **3 pt** Déterminer I_1 et I_2.

    Réponse : $\left(-3+2\sqrt{2}, 1+4\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$ *et* $\left(-3+2\sqrt{2}, 1-4\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$.

    Peu de tentatives, mais des succès parmi ces tentatives.

12. **2 pt** Déterminer une équation cartésienne et des équations paramétriques de d_1 et de d_2.
Question plus souvent abordée et réussie même si les expressions attendues ne sont pas particulièrement élégantes, vous y parvenez.

13. **2 pt** Montrer que d_1 et d_2 sont tangentes à $\mathcal{E}$.
Une ou deux bonnes réponses.

Partie 2 : Géométrie de l'espace **32 pt**

Dans $\mathscr{E}$ l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère les points $A\,(1,2,3)$, $B\,(2,3,1)$, $C\,(3,2,1)$, $D\,(-1,0,1)$ et on note Δ la droite d'équation $\begin{cases} x = z+2 \\ y = 2x-4 \end{cases}$.

14. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points équidistants de A et B.

(a) **1 pt** Déterminer les coordonnées de I le point milieu du segment $[AB]$.
blue pt Facile et bien réussie. Un ou deux parachutages.

(b) **2 pt** Soit $M \in \mathscr{E}$. Développer et simplifier $\left\|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}\right\|^2$.
Question pas toujours comprise, on voulait plutôt un développement littéral que d'avoir le calcul avec les coordonnées. Cependant les points ont été attribués si l'on donnait l'expression en fonction des coordonnées x, y, z. Deux ou trois ont bien compris la simplification attendue.

(c) **2 pt** En déduire que $\mathcal{P}$ est un plan dont on précisera une équation cartésienne puis un point et un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
L'égalité $\cdots = 0$ de l'équation est presque toujours parachutée ! N'oubliez pas de simplifier vos résultats. Le point et le vecteur normal sont en général bien donnés lorsque l'équation est correcte.

(d) **2 pt** Déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{P}$.
Plusieurs réponses correctes. On pouvait procéder de façon géométrique avec les vecteurs directeur et un point ou de façon analytique.

15. **2 pt** Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ l'ensemble des points équidistants de A, B et C.
Beaucoup de confusions sur comment obtenir $\mathcal{D}$. Peu pensent à utiliser $\mathcal{P}$. Certains obtiennent UNE équation de plan sans que cela les choque.

16. **2 pt** Préciser un point, un vecteur et une équation paramétrique de $\mathcal{D}$.
Peu de bonnes réponses au global car il fallait avoir réussie la précédente.

17. **3 pt** Déterminer le centre Ω et le rayon R de $\mathcal{S}$ la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$. En déduire son équation cartésienne.
Idem. Quelques tentatives de calcul analytique, correct en théorie, mais laborieuse en pratique.

18. **2 pt** Calculer $\vec{n}$ un vecteur normal à (ABC). En déduire une équation cartésienne de (ABC).
Plusieurs bonnes réponses. Quelques grossièretés d'autre part.

19. **2 pt** Retrouver une équation cartésienne de (ABC) par un calcul de déterminant.
Soignez un peu le détail de la rédaction. « Soit $M\,(x,y,z) \in \mathcal{E}$. On a $M \in (ABC) \Leftrightarrow \ldots$. Sinon la question est bien traitée.

20. **2 pt** Déterminer une équation paramétrique de $(ABC) \cap \mathcal{P}$.
Peu de tentatives.

21. **2 pt** Calculer la distance de Ω à (ABC).

Idem.

22. **2 pt** Déterminer un point et un vecteur de Δ.

Question facile et indépendante. Vous êtes nombreux à en profiter et avec succès même si plusieurs erreurs sont à noter sur cette question pourtant sans difficulté.

23. **2 pt** Les droites Δ et $\mathcal{D}$ sont-elles coplanaires ?

Pas de bonne réponse. Cf corrigé.

24. **2 pt** Calculer la distance de Ω à Δ.

Non traitée.

25. **2 pt** Soit $\mathcal{S}'$ la sphère passant par A, B, C et tangente à Δ. Déterminer Ω' son centre et R' son rayon puis en donner une équation cartésienne.

Non traitée.

26. **2 pt** Déterminer la nature de l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ puis en déterminer ses éléments caractéristiques.

Non traitée.

FIN