Corrigé du Devoir Surveillé 11
Variables aléatoires et Géométrie

Problème I - Variables aléatoires

Une urne contient $N \geqslant 2$ boules distinctes numérotées de 1 à N. On effectue successivement et avec remise des tirages dans l'urne. On fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ sur lequel on définit toutes nos variables aléatoires. Au tirage n, on note Z_n la variable aléatoire retournant 1 si le numéro tiré n'a jamais été pioché avant et 0 sinon. On note également Y_n le nombre de numéros **distincts** obtenus durant les n premiers tirages. On pose par convention $Y_0 = 0$ et on note que $Z_1 = Y_1 = 1$.

Partie 1 : Lois initiales

1. On note que Z_2 ne possède que deux issues : 0 ou 1. Donc Z_2 suit une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre. Au deuxième tirage, un numéro a déjà été pioché et remis dans l'urne. Notons A_1 ce numéro. Dès lors, pour obtenir un nouveau numéro, il faut piocher une boule parmi les $N-1$ qui n'ont pas le numéro A_1 : $N-1$ choix alors que le nombre total de boules est de N (car on a remis la boule piochée au premier tirage). Le tirage étant uniforme sur toutes les boules :
$$\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \frac{N-1}{N}.$$
Conclusion,
$$\boxed{Z_2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{N-1}{N}\right).}$$

2. On sait que lors du premier tirage on pioche forcément un nouveau numéro : $Y_1 = 1$. Puis lors du second tirage ou l'on repioche le même numéro, $Z_2 = 0$ et $Y_2 = 1$ ou l'on pioche un deuxième numéro, $Z_2 = 1$ $Y_2 = 2$. Donc $Y_2(\Omega) = \{1; 2\}$ et on note que
$$\boxed{Y_2 = Y_1 + Z_1 = 1 + Z_1.}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_2 = 1) &= \mathbb{P}(1 + Z_1 = 1) = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = \frac{1}{N} \\ \mathbb{P}(Y_2 = 2) &= \mathbb{P}(1 + Z_1 = 2) = \mathbb{P}(Z_1 = 1) = \frac{N-1}{N}. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{Y_2(\Omega) = \{1; 2\}, \qquad \mathbb{P}(Y_2 = 1) = \frac{1}{N}, \qquad \mathbb{P}(Y_2 = 2) = \frac{N-1}{N}.}$$

3. (a) L'évènement $(Y_2 = 1, Y_3 = 1)$ correspond à n'avoir pioché que un seul numéro lors des trois premiers tirages et donc d'avoir pioché le même numéro qu'au tirage 1 et 2 i.e $Y_2 = 1$ et de repiocher le même numéro au tirage 3 : $Z_3 = 0$. Ainsi,
$$\boxed{(Y_2 = 1, Y_3 = 1) = (Y_2 = 1, Z_3 = 0).}$$

   (b) Par la question précédente,
$$\mathbb{P}(Y_2 = 1, Y_3 = 1) = \mathbb{P}(Y_2 = 1, Z_3 = 0) = \mathbb{P}(Z_3 = 0 \mid Y_2 = 1)\,\mathbb{P}(Y_2 = 1).$$

On sait que $\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \frac{1}{N}$. De plus si $(Y_2 = 1)$, alors en deux tirages une seule boule a été tirée et il reste $N-1$ boules non tirées. Donc

$$\mathbb{P}(Z_3 = 0 \mid Y_2 = 1) = \frac{1}{N}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y_2 = 1, Y_3 = 1) = \frac{1}{N^2}.}$$

4. On sait que $Y_2(\Omega) = [\![1;2]\!]$. En trois pioches, nous avons pu obtenir 1, 2 ou 3 numéros distincts. Donc $Y_3(\Omega) = [\![1;3]\!]$. De même que dans les questions précédentes, on a

$$\mathbb{P}(Y_2 = 1, Y_3 = 2) = \mathbb{P}(Y_2 = 1, Z_3 = 1) = \mathbb{P}(Z_3 = 1 \mid Y_2 = 1)\,\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \frac{N-1}{N}\frac{1}{N} = \frac{N-1}{N^2}.$$

$(Y_2 = 1, Y_3 = 3)$ signifie avoir eu deux fois le même numéro lors de deux premiers tirages et d'obtenir 3 numéros distincts au bout du troisième tirage. Il faudrait avoir obtenu deux numéros distincts lors du tirage 3 ce qui est impossible :

$$\mathbb{P}(Y_2 = 1, Y_3 = 2) = 0.$$

En procédant de même pour les autres probabilités, on obtient :

Y_2 \ Y_3	1	2	3
1	$\frac{1}{N^2}$	$\frac{N-1}{N^2}$	0
2	0	$\frac{2(N-1)}{N^2}$	$\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}$

NB : on vérifie bien que $\frac{1}{N^2} + \frac{N-1}{N^2} + \frac{2(N-1)}{N^2} + \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} = \frac{1+N-1+2N-2+N^2-3N+2}{N^2} = 1$, *OK !*

5. Puisque $(Y_2 = i)_{i\in[\![1;2]\!]}$ forme un système complet, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y_3 = 1) = \mathbb{P}(Y_3 = 1, Y_2 = 1) + \mathbb{P}(Y_3 = 1, Y_2 = 2).$$

Par la loi conjointe, on en déduit que

$$\mathbb{P}(Y_3 = 1) = \frac{1}{N^2} + 0 = \frac{1}{N^2}.$$

De même,

$$\mathbb{P}(Y_3 = 2) = \mathbb{P}(Y_3 = 2, Y_2 = 1) + \mathbb{P}(Y_3 = 2, Y_2 = 2) = \frac{N-1}{N^2} + \frac{2(N-1)}{N^2} = \frac{3(N-1)}{N^2}$$
$$\mathbb{P}(Y_3 = 2) = \mathbb{P}(Y_3 = 3, Y_2 = 1) + \mathbb{P}(Y_3 = 3, Y_2 = 2) = 0 + \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} = \frac{(N-1)(N-2)}{N^2}.$$

Conclusion, la loi marginale de Y_3 est bien donnée par $Y_3(\Omega) = [\![1;3]\!]$ et

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y_3 = k)$	$\frac{1}{N^2}$	$\frac{3(N-1)}{N^2}$	$\frac{(N-1)(N-2)}{N^2}$

NB : à nouveau, $\frac{1}{N^2} + \frac{3(N-1)}{N^2} + \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} = \frac{1+3N-3+N^2-3N+2}{N^2} = 1$.

6. Par définition,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Y_3\right) &= \sum_{k=1}^{3} k\mathbb{P}\left(Y_3 = k\right)\\ &= \frac{1}{N^2} + 2\frac{3\left(N-1\right)}{N^2} + 3\frac{\left(N-1\right)\left(N-2\right)}{N^2}\\ &= \frac{1+6N-6+3N^2-9N+6}{N^2}\\ &= \frac{3N^2-3N+1}{N^2}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}\left(Y_3\right) = \frac{3N^2-3N+1}{N^2}.}$$

7. Par définition,

$$\operatorname{Cov}\left(Y_2, Y_3\right) = \mathbb{E}\left(Y_2Y_3\right) - \mathbb{E}\left(Y_2\right)\mathbb{E}\left(Y_3\right).$$

D'une part,

$$\mathbb{E}\left(Y_2Y_3\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1;2]\!]\times[\![1;3]\!]} ij\mathbb{P}\left(Y_2 = i, Y_3 = j\right).$$

Donc d'après la loi conjointe,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Y_2Y_3\right) &= 1\times 1\times\frac{1}{N^2} + 1\times 2\times\frac{N-1}{N^2} + 0 + 0 + 2\times 2\times\frac{2\left(N-1\right)}{N^2} + 2\times 3\times\frac{\left(N-1\right)\left(N-2\right)}{N^2}\\ &= \frac{1+2N-2+8N-8+6N^2-18N+12}{N^2}\\ &= \frac{6N^2-8N+3}{N^2}.\end{aligned}$$

D'autre part, par la loi de Y_2 donnée en question 2.

$$\mathbb{E}\left(Y_2\right) = \frac{1}{N} + 2\times\frac{N-1}{N} = \frac{2N-1}{N}.$$

Finalement, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\left(Y_2, Y_3\right) &= \frac{6N^2-8N+3}{N^2} - \frac{2N-1}{N}\frac{3N^2-3N+1}{N^2}\\ &= \frac{6N^3-8N^2+3N-6N^3+6N^2-2N+3N^2-3N+1}{N^3}\\ &= \frac{N^2-2N+1}{N^3}\\ &= \frac{\left(N-1\right)^2}{N^3}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\operatorname{Cov}\left(Y_2, Y_3\right) = \frac{\left(N-1\right)^2}{N^3}.$$

8. Puisque $N \geqslant 2$, par la question précédente, $\operatorname{Cov}\left(Y_2, Y_3\right) = \frac{(N-1)^2}{N^3} > 0$. Donc les variables Y_2 et Y_3 ne sont pas corrélées. En particulier (on rappelle que la réciproque est fausse),

$$\boxed{\text{les variables } Y_2 \text{ et } Y_3 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Partie 2 : Loi de Z_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $m = \min(n, N)$.

9. Y_n désigne le nombre de nouveaux numéros obtenus lors de $n \geqslant 1$ tirages. Nécessairement, Y_n est un nombre strictement positif : $Y_n \geqslant 0$. De plus en n tirages on ne peut pas obtenir plus que n numéro : $Y_n \leqslant n$ ni plus de numéro que ne contient l'urne : $Y_n \leqslant N$. Donc $Y_n \leqslant m$. Conclusion,
$$\boxed{Y_n(\Omega) \subset [\![1; m]\!].}$$

10. Soit $k \in [\![1; m]\!]$. Supposons $(Y_n = k)$. Alors en n tirages nous avons obtenu exactement k numéros distincts. Il reste donc dans l'urne $N - k$ numéros non piochés et k numéros déjà piochés. Le tirage étant uniforme, la probabilité d'obtenir un nouveau numéro est alors,
$$\boxed{\forall k \in [\![1; m]\!], \qquad \mathbb{P}(Z_{n+1} = 1 \mid Y_n = k) = \frac{N-k}{N}.}$$

11. La famille $(Y_n = k)_{k \in [\![1;m]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) &= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Z_{n+1} = 1 \mid Y_n = k)\,\mathbb{P}(Y_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{N-k}{N}\mathbb{P}(Y_n = k) \qquad \text{par la question précédente} \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{k}{N}\right)\mathbb{P}(Y_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(Y_n = k) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(Y_n = k) \\
&= 1 - \frac{1}{N}\mathbb{E}(Y_n).
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N}\mathbb{E}(Y_n).}$$

12. Chaque Z_i compte si le tirage i a apporté un nouveau numéro ou non tandis que Y_n compte le nombre total de nouveaux numéros. Par conséquent,
$$\boxed{Y_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k.}$$

13. Par la question 11.
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) &= 1 - \frac{1}{N}\mathbb{E}(Y_n) \\
&= 1 - \frac{1}{N}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right) \qquad \text{par la question précédente} \\
&= 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Z_k) \qquad \text{par linéarité de l'espérance.}
\end{aligned}$$

On note que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Z_k n'a que deux issues 0 et 1. Donc Z_k suit une loi de Bernoulli. Notons p_k son paramètre. Dès lors, on sait que

$$\mathbb{E}(Z_k) = p_k = \mathbb{P}(Z_k = 1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1).}$$

14. Procédons par récurrence forte. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$ ».

Initialisation. Si $n = 1$, on a $Z_1 = 1$. Donc

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = 1.$$

D'autre part, $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^0 = 1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par la question précédente,

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) = 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1).$$

Par l'hypothèse de récurrence, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) &= 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= 1 - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k} && \text{en posant } \tilde{k} = k - 1 \\
&= 1 - \frac{1}{N}\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)} && \text{car on a une somme géométrique de raison } 1 - \frac{1}{N} \neq 1 \\
&= 1 - \frac{1}{N}\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}{\frac{1}{N}} \\
&= 1 - \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\
&= \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.
\end{aligned}$$

On obtient bien $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(Z_n = 1) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}.}$$

Partie 3 : Autour de Y_N

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 12. on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_k = 1) && \text{car } Z_k \text{ suit une loi de Bernoulli} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k} \\
&= \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}{\frac{1}{N}} \\
&= N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{E}(Y_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).}$$

En particulier, pour $n = 3$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_3) &= N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^3\right) \\
&= N\left[1 - \left(1 - \frac{3}{N} + \frac{3}{N^2} - \frac{1}{N^3}\right)\right] \\
&= N\frac{3N^2 - 3N + 1}{N^3} \\
&= \frac{3N^2 - 3N + 1}{N^2}
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 6.

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_3) = \frac{3N^2 - 3N + 1}{N^2}.}$$

16. Par la question précédente,

$$\mathbb{E}(Y_N) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N\right) = N\left(1 - \mathrm{e}^{N\ln\left(1 - \frac{1}{N}\right)}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_N) &\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \mathrm{e}^{N\left(-\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)}\right) \\
&\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \mathrm{e}^{-1+o(1)}\right) \\
&\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{o(1)}\right) \\
&\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\left(1 + o(1)\right)\right) \\
&\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} + o(1)\right) \\
&\underset{N\to+\infty}{=} N\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) + o(N).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_N) \underset{N\to+\infty}{\sim} N\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n le nombre de numéros encore jamais pioché durant les étapes 1 à n.

17. Puisque Y_N est le nombre de nouveaux numéros obtenus et X_N le nombre de numéros encore non piochés, la somme des deux donne bien le nombre de tous les numéros. On a donc

$$Y_N + X_N = N.$$

Conclusion,

$$\boxed{X_N = N - Y_N.}$$

18. Par la question précédente et la linéarité de l'espérance, pour tout $N \geqslant 2$,

$$\frac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = \frac{\mathbb{E}(N-Y_N)}{N} = \frac{N-\mathbb{E}(Y_N)}{N} = 1 - \frac{\mathbb{E}(Y_N)}{N}.$$

Donc par la question 16.

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = 1 - \left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}} < \frac{1}{2}.$$

En posant $\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $N \geqslant N_0$,

$$\frac{1}{\mathrm{e}} - \varepsilon \leqslant \frac{\mathbb{E}(X_N)}{N} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} + \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists N_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall N \geqslant N_0, \qquad \frac{\mathbb{E}(X_N)}{N} \leqslant \frac{1}{2}.}$$

19. Soit $N \geqslant N_0$. On observe que

$$\mathbb{P}\left(Y_N \leqslant \frac{N}{3}\right) = \mathbb{P}\left(N - X_N \leqslant \frac{N}{3}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{2N}{3} \leqslant X_N\right).$$

Par l'inégalité de Markov, car X_N est une variable aléatoire à valeurs positives,

$$\mathbb{P}\left(Y_N \leqslant \frac{N}{3}\right) = \mathbb{P}\left(X_N \geqslant \frac{2N}{3}\right) \leqslant \frac{3\mathbb{E}(X_N)}{2N}.$$

Donc par la question précédente, comme $N \geqslant N_0$,

$$\mathbb{P}\left(Y_N \leqslant \frac{N}{3}\right) \leqslant \frac{3}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall N \geqslant N_0, \qquad \mathbb{P}\left(Y_N \leqslant \frac{N}{3}\right) \leqslant \frac{3}{4}.}$$

L'inégalité n'est pas formidable mais permet quand même de quantifier un peu que lorsque N devient assez grand, Y_N ne prend pas trop de petites valeurs.

Partie 4 : Par les fonctions génératrices

On fixe à nouveau $N \geqslant 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note G_n la fonction génératrice de Y_n.

20. Puisque $Y_0 = 0$. On a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_0(t) = t^0 \mathbb{P}(Y_0 = 0) = 1.$$
Puisque $Y_1 = 1$,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_1(t) = t^1 \mathbb{P}(Y_1 = 1) = t.$$
Enfin, par la question 2.
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_2(t) = t\mathbb{P}(Y_2 = 1) + t^2 \mathbb{P}(Y_2 = 2) = \frac{t}{N} + \frac{(N-1)t^2}{N}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_0(t) = 1,\ G_1(t) = t,\ G_2(t) = \frac{1}{N}t + \frac{N-1}{N}t^2 = \frac{t + (N-1)\,t^2}{N}.}$$

21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in [\![0; N]\!]$. Supposons $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Puisque $(Y_n = i)_{i \in [\![0;m]\!]}$ forme un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = i)\, \mathbb{P}(Y_n = i).$$
Si $(Y_n = i)$ on a obtenu i numéros distincts pendant les n premiers tirages. Dans ce cas, si l'on n'obtient pas un nouveau numéro, $Y_{n+1} = Y_n = i$ et si l'on obtient un nouveau numéro, $Y_{n+1} = Y_n + 1 = i + 1$. Donc si $k \neq i$ et $k \neq i+1$,
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = i) = 0$$
Cela correspond aussi à $i \neq k$ et $i \neq k-1$. Alors,
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = k-1)\, \mathbb{P}(Y_n = k-1) + \mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = k)\, \mathbb{P}(Y_n = k).$$
Si $(Y_n = k-1)$, alors $(Y_{n+1} = k)$ correspond à avoir un nouveau numéro sachant que $k-1$ ont déjà été obtenus :
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = k-1) = \frac{N-(k-1)}{N} = 1 - \frac{k-1}{N}.$$
D'autre part, si $(Y_n = k)$, alors $(Y_{n+1} = k)$ correspond à ne pas avoir un nouveau numéro sachant que k ont déjà été obtenus :
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k \mid Y_n = k-1) = \frac{k}{N}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbb{P}(Y_n = k) + \left(1 - \frac{k-1}{N}\right)\mathbb{P}(Y_n = k-1).}$$
Eventuellement quelques-uns de ces évènements sont négligeables, par exemple si $k = 0$ ou $k > n$ mais la formule reste vraie.

22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition, puisque $Y_{n+1}(\Omega) \subset [\![1; m]\!] \subset [\![1; N]\!]$,
$$G_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{N} t^k \mathbb{P}(Y_{n+1} = k).$$

Là encore certains de ces évènement peuvent être négligeables. Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \sum_{k=1}^{N}\left[t^k\frac{k}{N}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)+t^k\left(1-\frac{k-1}{N}\right)\mathbb{P}\left(Y_n=k-1\right)\right]\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}kt^k\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)+\sum_{k=1}^{N}t^k\left(1-\frac{k-1}{N}\right)\mathbb{P}\left(Y_n=k-1\right)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}kt^k\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)+\sum_{k=0}^{N-1}t^{k+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)\mathbb{P}\left(Y_n=k\right) \qquad \text{en posant } \tilde{k}=k-1\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}kt^k\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)+\sum_{k=0}^{N}t^{k+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}kt^k\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)+\sum_{k=0}^{N}t^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)-\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}kt^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}kt^k\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)+\sum_{k=0}^{N}t^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}kt^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\\
&= \frac{1-t}{N}\sum_{k=1}^{N}kt^k\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)+\sum_{k=0}^{N}t^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{G_{n+1}(t)=\frac{1-t}{N}\sum_{k=1}^{N}kt^k\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)+\sum_{k=0}^{N}t^{k+1}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right).}$$

23. Puisque

$$G_n(t)=\sum_{k=0}^{N}t^k\mathbb{P}\left(Y_n=k\right).$$

Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(t) &= \frac{(1-t)\,t}{N}\sum_{k=1}^{N}kt^{k-1}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)+t\sum_{k=0}^{N}t^k\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\\
&= \frac{(1-t)\,t}{N}\sum_{k=1}^{N}kt^{k-1}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)+tG_n(t).
\end{aligned}$$

D'autre part, la fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et

$$G_n'(t)=\sum_{k=1}^{N}kt^{k-1}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right).$$

Ainsi,

$$G_{n+1}=\frac{(1-t)\,t}{N}G_n'(t)+tG_n(t)$$

Conclusion,

$$\boxed{G_{n+1}(t)=\frac{1}{N}t\left(1-t\right)G_n'(t)+tG_n(t).}$$

24. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par la question précédente, les fonctions G_{n+1}, G_n et G_n' étant dérivables en tant que

fonctions polynomiales,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} G'_{n+1}(t) &= \frac{1}{N}\left(t-t^2\right)' G'_n(t) + \frac{1}{N} t\,(1-t)\,G''_n(t) + G_n(t) + tG'_n(t) \\ &= \frac{1}{N}(1-2t)\,G'_n(t) + \frac{1}{N} t\,(1-t)\,G''_n(t) + G_n(t) + tG'_n(t) \\ &= \left(\frac{1-2t}{N} + t\right) G'_n(t) + \frac{1}{N} t\,(1-t)\,G''_n(t) + G_n(t). \end{aligned}$$

En évaluant en 1,

$$G'_{n+1}(1) = \left(\frac{-1}{N} + 1\right) G'_n(1) + 0 + G_n(1)$$

Or par le cours, on sait que $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = G'_{n+1}(1)$, $\mathbb{E}(Y_n) = G'_n(1)$ et $G_n(1) = 1$. Finalement, on obtient bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}(Y_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}(Y_n) + 1.}$$

25. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{E}(Y_n)$. Par la question précédente,

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) a_n + 1.$$

On reconnait une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\omega = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\omega + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{N}\,\omega = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = N.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - \omega = a_n - N$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} - N \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) a_n + 1 - N \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right)(b_n + N) + 1 - N \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) b_n + N - 1 + 1 - N \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) b_n. \end{aligned}$$

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\left(1 - \frac{1}{N}\right)$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n b_0 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n (a_0 - N) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n (\mathbb{E}(Y_0) - N) = -N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = b_n + N = N - N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$

On retrouve le résultat de la question 15. (et même étendu au rang 0) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}(Y_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right).}$$

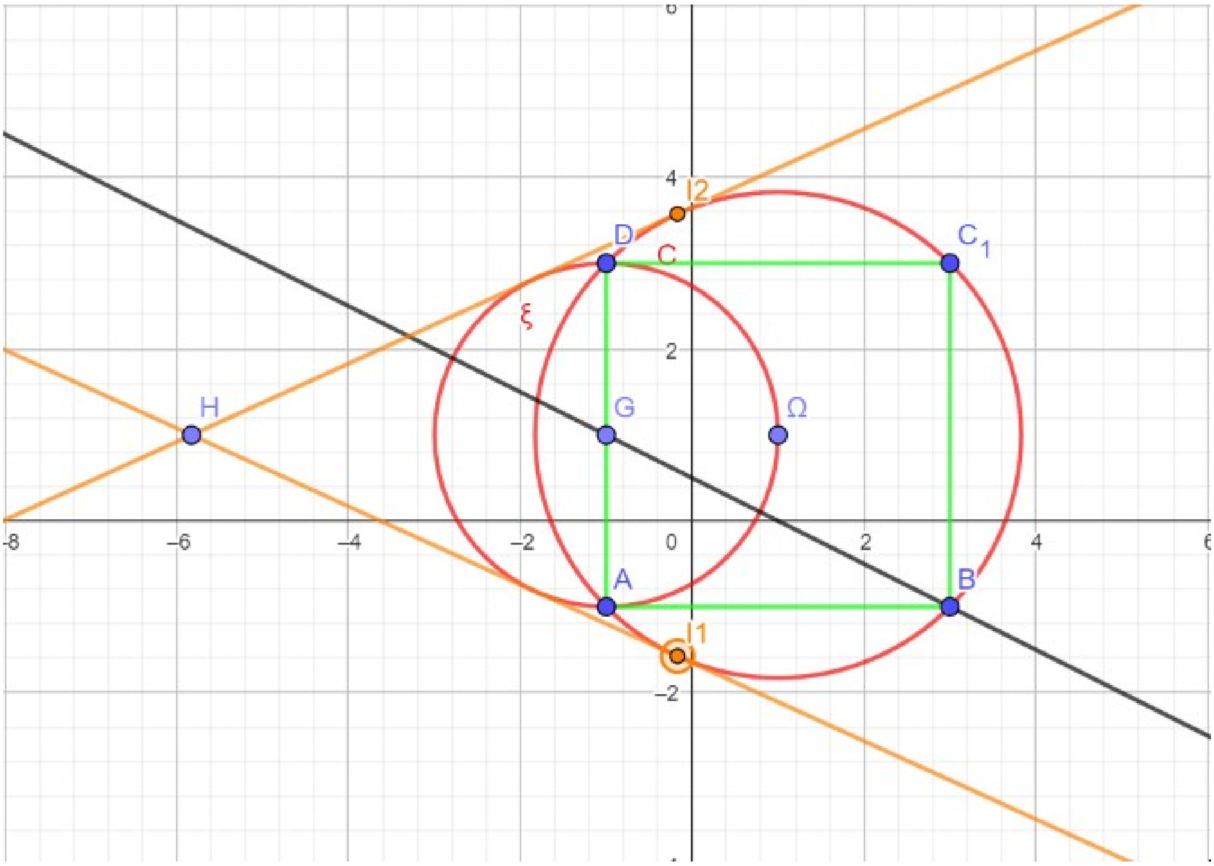
Problème II - Géométrie

Ce problème est composé de deux parties indépendantes.

Partie 1 : Géométrie du plan

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère les quatre points $A(-1,-1)$, $B(3,-1)$, $C(3,3)$ et $D(-1,3)$. On notera G le milieu de $[AD]$.

1. On obtient la figure suivante (admirez mon coup de crayon) :



2. Calculons,

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3+1 \\ -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{DC} = \begin{bmatrix} 3+1 \\ 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme. De plus,

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4^2+0^2} = 4, \qquad AD = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} -1+1 \\ 3+1 \end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right\| = 4.$$

Donc $ABCD$ est un losange. Enfin,

$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux donc $ABCD$ est aussi un rectangle. Conclusion,

$$\boxed{ABCD \text{ est un carré.}}$$

3. Puisque G est le milieu de AD, on a
$$x_G = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1 \qquad y_G = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1.$$
Conclusion, les coordonnées de G sont
$$\boxed{G\,(-1,1)}$$

4. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tel que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.
Soit $M\,(x,y) \in \mathscr{P}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{E} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \\
&\Leftrightarrow \quad \left\|2\begin{bmatrix}-1-x\\-1-y\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3-x\\-1-y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3-x\\3-y\end{bmatrix}\right\| = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad \left\|\begin{bmatrix}-2-2x-3+x+3-x\\-2-2y+1+y+3-y\end{bmatrix}\right\| = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad \left\|\begin{bmatrix}-2-2x\\2-2y\end{bmatrix}\right\| = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{(2+2x)^2 + (2-2y)^2} = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 4 + 8x + 4x^2 + 4 - 8y + 4y^2 = 16 \qquad \text{OK pour la réciproque car } 4 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2 = 0.
\end{aligned}$$
Conclusion, $\mathcal{E}$ admet pour équation
$$\boxed{\mathcal{E}: \qquad x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0.}$$

5. Par la question précédente, pour $M\,(x,y) \in \mathscr{P}$, on a
$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{E} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2^2.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est le cercle de centre } (-1,1) \text{ et de rayon } 2.}$$

6. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Puisque $ABCD$ est un carré, ABC est un triangle rectangle isocèle en B. Par conséquent $[AC]$ constitue une diagonale du cercle inscrit et Ω est donc le milieu de $[AC]$ et a pour coordonnées
$$\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (1,1)\,.$$
Conclusion, le centre de $\mathcal{C}$ est donné par
$$\boxed{\Omega\,(1,1)\,.}$$

7. Puisque $A \in \mathcal{C}$, on a $R = A\,\Omega$. D'où
$$R = \left\|\overrightarrow{A\,\Omega}\right\| = \left\|\begin{bmatrix}1+1\\1+1\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$
Par suite, une équation de $\mathcal{C}$ est donnée par
$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8.$$
Conclusion,
$$\boxed{R = 2\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}: \qquad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8.}$$

8. Soit $M(x,y) \in \mathscr{P}$. Par les questions précédentes, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\(x-1)^2+(y-1)^2=8\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\(x-1)^2+(y-1)^2=8\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\(x-1)^2-(x+1)^2=4\end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\(x-1-x-1)(x-1+x+1)=4\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\-2(2x)=4\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=4\\x=-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(y-1)^2=4\\x=-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}y-1=2\\x=-1\end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases}y-1=-2\\x=-1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad (x,y)=(-1,3) \quad \text{OU} \quad (x,y)=(-1,-1).
\end{aligned}$$

Il est logique de trouver deux points pour l'intersection des deux cercles car, en notant $\Omega' = (-1,1)$ le centre du cercle $\mathcal{E}$ et $R' = 2$ son rayon, on a

$$\Omega\,\Omega' = \left\| \begin{bmatrix} -1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} \right\| = 2.$$

Donc on a bien $|R - R'| < \Omega\,\Omega' < R + R'$. Conclusion, $\mathcal{E} \cap \mathcal{C}$ est un ensemble de deux points :

$$\boxed{U(-1,3) \text{ et } V(-1,1).}$$

9. Soit $H\left(-3-2\sqrt{2},1\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{GB}$ est une vecteur directeur de (GB) et

$$\overrightarrow{GB} = \begin{bmatrix} 3+1 \\ -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Donc $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à (GB). Puisque $G \in (GB)$, on a

$$d(H,(GB)) = \left| \left\langle \overrightarrow{GH}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\rangle \right| = \left| \left\langle \begin{bmatrix} -3-2\sqrt{2}+1 \\ 1-1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \left| -2-2\sqrt{2} \right|.$$

Conclusion,

$$\boxed{d(H,(GB)) = \frac{2\sqrt{5}}{5}\left(1+\sqrt{2}\right).}$$

10. Puisque Ω est le centre de $\mathcal{C}$ et R son rayon, on a

$$d(H,\mathcal{C}) = |H\,\Omega - R| = \left| \left\| \begin{bmatrix} 1+3+2\sqrt{2} \\ 1-1 \end{bmatrix} \right\| - 2\sqrt{2} \right| = \left|4+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right| = 4.$$

Conclusion,

$$\boxed{d(H,\mathcal{C}) = 4.}$$

Soient d_1 et d_2 les deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par H. On note I_1 le point d'intersection de d_1 avec $\mathcal{C}$ et I_2 celui de d_2 avec $\mathcal{C}$.

11. Soit $I\,(x,y) \in \mathscr{P}$. Notons $\mathcal{S} = \{I_1, I_2\}$ l'ensemble des points d'intersection d'une tangente à $\mathcal{C}$ passant par H. On a

$$\begin{aligned}
I \in \mathcal{S} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} I \in \mathcal{C} \\ \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{\Omega I} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ \left\langle \overrightarrow{HI}, \overrightarrow{\Omega I} \right\rangle = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ \left\langle \begin{bmatrix} x+3+2\sqrt{2} \\ y-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ \left(x+3+2\sqrt{2}\right)(x-1) + (y-1)^2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ \left(x+3+2\sqrt{2}\right)(x-1) - (x-1)^2 = -8 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left(x+3+2\sqrt{2}\right)(x-1) - (x-1)^2 = -8 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x+3+2\sqrt{2}-x+1\right)(x-1) = -8 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(4+2\sqrt{2}\right)(x-1) = -8 \\
&\Leftrightarrow \quad x-1 = -\frac{4}{2+\sqrt{2}} = -\frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2} = -2\left(2-\sqrt{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad x = -3+2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$I \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ x = -3+2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Puis si $x = -3+2\sqrt{2}$, on a

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(-4+2\sqrt{2}\right)^2 + (y-1)^2 = 8 \\
&\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(-4+2\sqrt{2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = \left(2\sqrt{2}+4-2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}-4+2\sqrt{2}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = 4\left(4\sqrt{2}-4\right) = 16\left(\sqrt{2}-1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad y-1 = 4\sqrt{\sqrt{2}-1} \ \text{ OU } \ y-1 = -4\sqrt{\sqrt{2}-1} \\
&\Leftrightarrow \quad y = 1+4\sqrt{\sqrt{2}-1} \ \text{ OU } \ y = 1-4\sqrt{\sqrt{2}-1}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$I \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -3+2\sqrt{2} \\ y = 1+4\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -3+2\sqrt{2} \\ y = 1-4\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{cases}.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_1\left(-3+2\sqrt{2}, 1+4\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) \quad \text{et} \quad I_2\left(-3+2\sqrt{2}, 1-4\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) \qquad \textit{ou l'inverse...}}$$

12. On note que $d_1 = (HI_1)$. Donc un vecteur directeur est donné par $\overrightarrow{HI_1} = \begin{bmatrix} -3+2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2} \\ 1+4\sqrt{\sqrt{2}-1}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{bmatrix}$. De plus $H \in d_1$. Donc des équations paramétriques de d_1 sont

$$\boxed{d_1 : \qquad \begin{cases} x = -3+2\sqrt{2}+4\sqrt{2}t \\ y = 1+4\sqrt{\sqrt{2}-1}t \end{cases}.}$$

Pour l'équation cartésienne, quatre méthodes.

Méthode 1. Soit $M(x,y) \in \mathscr{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in d_1 \quad & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{HM} \text{ et } \overrightarrow{HI_1} \text{ colinéaires} \\ & \Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HI_1}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x+3+2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ y-1 & 4\sqrt{\sqrt{2}-1} \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{\sqrt{2}-1}x + 4\left(3+2\sqrt{2}\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{2}y + 4\sqrt{2} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{\sqrt{2}-1}x - 4\sqrt{2}y = -4\left(3+2\sqrt{2}\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{2} \\ & \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x - 2y = -\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} - 2. \end{aligned}$$

Méthode 2. A l'aide de $\overrightarrow{HI_1}$, on en déduit que $\begin{bmatrix} 4\sqrt{\sqrt{2}-1} \\ -4\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ou encore $\overrightarrow{n_1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2}-1} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à d_1. Soit $M(x,y) \in \mathscr{P}$. On a

$$\begin{aligned} M \in d_1 \quad & \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{HM} \text{ et } \overrightarrow{n_1} \text{ sont orthogonaux} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{HM}, \overrightarrow{n_1} \right\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x+3+2\sqrt{2} \\ y-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2}-1} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \sqrt{\sqrt{2}-1}x + \left(3+2\sqrt{2}\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x - 2y = -\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} - 2. \end{aligned}$$

Méthode 3. Puisque $\overrightarrow{n_1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sqrt{2}-1} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à d_1. Alors

$$\exists d \in \mathbb{R}, \ \sqrt{\sqrt{2}-1}x - \sqrt{2}y = d.$$

Or $H \in d_1$ donc

$$d = \sqrt{\sqrt{2}-1}\left(-3-2\sqrt{2}\right) - \sqrt{2} = -\sqrt{\sqrt{2}-1}\left(3+2\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}.$$

Ainsi, une équation cartésienne de d_1 est

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sqrt{2}-1}x - \sqrt{2}y = -\sqrt{\sqrt{2}-1}\left(3+2\sqrt{2}\right) - \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x - 2y = -\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} - 2. \end{aligned}$$

Méthode 4. Ouf après on arrête ! Par les équations paramétriques, pour $M(x,y)\in\mathscr{P}$,

$$\begin{aligned}
M\in d_1 \quad&\Leftrightarrow\quad \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} t=\frac{x+3+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\\ y=1+t4\sqrt{\sqrt{2}-1}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \exists t\in\mathbb{R},\ \begin{cases} t=\frac{x\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4}{8}\\ y=1+\frac{x\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4}{8}4\sqrt{\sqrt{2}-1}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad y=1+\frac{x\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4}{8}4\sqrt{\sqrt{2}-1}\\
&\Leftrightarrow\quad 8y=8+4\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1}\\
&\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x-2y=-2-\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1}.
\end{aligned}$$

Conclusion, quelque soit la méthode, on obtient,

$$\boxed{d_1:\qquad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x-2y=-\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1}-2.}$$

De la même façon, $\overrightarrow{HI_2}=\begin{bmatrix}4\sqrt{2}\\-4\sqrt{\sqrt{2}-1}\end{bmatrix}$. Donc les équations paramétriques sont données par

$$\boxed{d_2:\qquad \begin{cases}x=-3+2\sqrt{2}+t4\sqrt{2}\\ y=1-t4\sqrt{\sqrt{2}-1}\end{cases}.}$$

Puis, toujours de même, appliquons par exemple la méthode 1, pour $M(x,y)\in\mathscr{P}$. On a

$$\begin{aligned}
M\in d_2\quad&\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{HM}\text{ et }\overrightarrow{HI_2}\text{ colinéaires}\\
&\Leftrightarrow\quad \det\left(\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HI_2}\right)=0\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix}x+3+2\sqrt{2} & 4\sqrt{2}\\ y-1 & -4\sqrt{\sqrt{2}-1}\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow\quad -4\sqrt{\sqrt{2}-1}x-4\left(3+2\sqrt{2}\right)\sqrt{\sqrt{2}-1}-4\sqrt{2}y+4\sqrt{2}=0\\
&\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x+2y=-\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1}-2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d_1:\qquad \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}x+2y=-\left(3\sqrt{2}+4\right)\sqrt{\sqrt{2}-1}-2.}$$

13. Pour montrer que d_1 est tangente à $\mathcal{E}$, montrons que la distance de $\Omega'(-1,1)$ est à une distance $R'=2$ de la droite d_1. Puisque $H\in d_1$ et que $\overrightarrow{n_1}=\begin{bmatrix}\sqrt{\sqrt{2}-1}\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à d_1, on a

$$\begin{aligned}
d\left(\Omega',d_1\right)&=\left|\left\langle\overrightarrow{H\Omega'},\frac{\overrightarrow{n_1}}{\|\overrightarrow{n_1}\|}\right\rangle\right|\\
&=\left|\left\langle\begin{bmatrix}-1+3+2\sqrt{2}\\1-1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1+2}}\begin{bmatrix}\sqrt{\sqrt{2}-1}\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\rangle\right|\\
&=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\left|\left\langle\begin{bmatrix}2+2\sqrt{2}\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sqrt{\sqrt{2}-1}\\-\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\rangle\right|\\
&=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\left(2+2\sqrt{2}\right)\sqrt{\sqrt{2}-1}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}+1}2\left(1+\sqrt{2}\right)\sqrt{2-1}\\
&=2=R'.
\end{aligned}$$

De même, $\overrightarrow{n_2}=\begin{bmatrix}\sqrt{\sqrt{2}-1}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à d_2

$$\begin{aligned}
d\left(\Omega', d_2\right) &= \left|\left\langle \overrightarrow{H\,\Omega'}, \frac{\overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_2}\|}\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \begin{bmatrix}2+2\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1+2}}\begin{bmatrix}\sqrt{\sqrt{2}-1}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}\right\rangle\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\left(2+2\sqrt{2}\right)\sqrt{\sqrt{2}-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}+1}2\left(1+\sqrt{2}\right)\sqrt{2-1} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les droites } d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont tangentes à } \mathcal{E}.}$$

Partie 2 : Géométrie de l'espace

Dans $\mathscr{E}$ l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ on considère les points $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(3,2,1)$, $D(-1,0,1)$ et on note Δ la droite d'équation $\begin{cases} x = z+2 \\ y = 2x-4 \end{cases}$.

14. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points équidistants de A et B.

(a) Soit $I(x_I, y_I)$ le point milieu du segment $[AB]$. On a $I = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc

$$\begin{cases} x_I = x_A + \frac{x_B-x_A}{2} = \frac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = y_A + \frac{y_B-y_A}{2} = \frac{y_A+y_B}{2} \\ z_I = z_A + \frac{z_B-z_A}{2} = \frac{z_A+z_B}{2} \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{I(3/2, 5/2, 2)}$$

(b) Soit $M \in \mathscr{E}$. Soit $\alpha = \left\|\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right\|^2$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left\|\overrightarrow{AI}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM}\right\rangle + \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2 - \left(\left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IM}\right\rangle + \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2\right) \\
&= \left\|\overrightarrow{AI}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM}\right\rangle - 2\left\langle \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IM}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Or puisque I est le milieu de $[A;B]$, on a $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AI}$. Donc

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left\|\overrightarrow{AI}\right\|^2 - \left\|-\overrightarrow{AI}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM}\right\rangle - 2\left\langle -\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM}\right\rangle \\
&= \left\|\overrightarrow{AI}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AI}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM}\right\rangle + 2\left\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM}\right\rangle \\
&= 4\left\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM}\right\rangle.
\end{aligned}$$

On vient de redémontrer l'égalité de polarisation. Conclusion,

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IM}\right\|^2 = 4\left\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM}\right\rangle = 2\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IM}\right\rangle.}$$

(c) Soit $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AM}\right\| = AM = BM = \left\|\overrightarrow{BM}\right\| \\
&\Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}\right\| \qquad \text{par la relation de Chasles} \\
&\Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 \\
&\qquad\qquad \text{car } \left\|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right\| \text{ et } \left\|\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}\right\| \text{ sont de même signe} \\
&\Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IM} \right\rangle = 0 \qquad \text{par la question précédente} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\left\langle \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x-\frac{3}{2} \\ y-\frac{5}{2} \\ z-2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\left(x - \frac{3}{2} + y - \frac{5}{2} - 2(z-2)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x - \frac{3}{2} + y - \frac{5}{2} - 2(z-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x + y - 2z + \frac{8-3-5}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x + y - 2z = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble $\mathcal{P}$ est donc un plan :

$$\boxed{\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \right\}.}$$

Directement, on a donc

$$\boxed{\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ qui est un vecteur normal à } \mathcal{P}.}$$

De plus,

$$\boxed{\text{On observe que } O(0,0,0) \text{ est un point de } \mathcal{P}.}$$

(d) *Méthode 1.* Par la question précédente, on sait que $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Posons $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. On observe que $\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 0$ donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{P}$. De plus,

$$\vec{u} \wedge \vec{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Posons alors, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. On a alors $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{n}$ et donc en particulier, $\vec{v} \in \mathcal{P}$. De plus $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et donc forment une famille libre de $\mathcal{P}$, de plus $O \in \mathcal{P}$ donc

$$\mathcal{P} = \left\{ O + t\vec{u} + t\vec{v} \mid (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -t+s \\ t+s \\ s \end{bmatrix} \;\middle|\; (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Conclusion, une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : \begin{cases} x = -t + s \\ y = t + s \\ z = s \end{cases} \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.}$$

Méthode 2. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - 2z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = -y + 2z \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} -y + 2z \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Conclusion, une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : \begin{cases} x = -t + 2s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.}$$

15. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points équidistants de A, B et C. Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& M \in \mathcal{D} \\
\Leftrightarrow \quad & AM = BM = CM \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} M \in \mathcal{P} \\ AM^2 = CM^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ (x-1)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (z-1)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x^2 - 2x + 1 + z^2 - 6z + 9 = x^2 - 6x + 9 + z^2 - 2z + 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, $\mathcal{D}$ est une droite dont une équation cartésienne est donnée par

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}}$$

16. Par la question précédente, on observe que $\boxed{O\,(0,0,0) \text{ est un point de } \mathcal{D}}$. De plus, $\overrightarrow{n_1}\,(1,1,-2)$ et $\overrightarrow{n_2}\,(1,0,-1)$ sont deux vecteurs normaux à $\mathcal{D}$. Or

$$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\overrightarrow{u_1} = (1,1,1) \text{ est un vecteur directeur de } \mathcal{D}}$. Conclusion, une équation paramétrique est donnée par

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.}$$

17. Commençons par chercher le centre. Soit $\Omega\,(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& A\,\Omega = B\,\Omega = C\,\Omega = D\,\Omega \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \Omega \in \mathcal{D} \\ A\,\Omega^2 = D\,\Omega^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \Omega = (t,t,t) \\ (t-1)^2 + (t-2)^2 + (t-3)^3 = (t+1)^2 + t^2 + (t-1)^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \Omega = (t,t,t) \\ (t-2)^2 + (t-3)^3 = (t+1)^2 + t^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \Omega = (t,t,t) \\ t^2 - 4t + 4 + t^2 - 6t + 9 = t^2 + 2t + 1 + t^2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \Omega = (t,t,t) \\ 12 = 12t \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \exists t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \Omega = (t,t,t) \\ t = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \Omega = (1,1,1).
\end{aligned}$$

Dès lors, on obtient que le rayon de la sphère est donné par

$$R^2 = \Omega\,A^2 = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|^2 = 1 + 4 = 5.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Le centre de } \mathcal{S} \text{ est donné par } \Omega\,(1,1,1) \text{ et son rayon par } R = \sqrt{5}.}$$

De là, on en déduit que

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5. \right\}.}$$

18. On note que $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 2-2 \\ 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc forment une base du plan vectoriel associé à (ABC). De plus,

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \text{ est un vecteur normal à } (ABC).}$$

Donc il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que

$$(ABC) \quad : \quad x+y+z=d.$$

Or $A(1,2,3) \in (ABC)$ donc $1+2+3=d$ i.e. $d=6$. Conclusion,

$$\boxed{(ABC) \quad : \quad x+y+z=6.}$$

19. Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M \in (ABC) \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanéaires}\\
&\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2\\ y-2 & 1 & 0\\ z-3 & -2 & -2\end{vmatrix}=0\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2\\ y-2 & 1 & 0\\ x+z-4 & -1 & 0\end{vmatrix}=0 \qquad\qquad L_3 \leftarrow L_3+L_1\\
&\Leftrightarrow \quad +2\begin{vmatrix} y-2 & 1\\ x+z-4 & -1\end{vmatrix}=0 \qquad\qquad \text{en développant la troisième colonne}\\
&\Leftrightarrow \quad 2(-y+2-x-z+4)=0\\
&\Leftrightarrow \quad x+y+z-6=0.
\end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation cartésienne obtenue à la question précédente :

$$\boxed{(ABC) \quad : \quad x+y+z=6.}$$

20. Soit $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Par les questions précédentes on a :

$$\begin{aligned}
M \in (ABC) \cap \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=6\\ x+y-2z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=6\\ -3z=-6\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=6-y-z=6-y-2=4-y\\ z=2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, une équation paramétrique de $(ABC) \cap \mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\begin{cases} x=4-t\\ y=t\\ z=2\end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

21. Puisque $\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC) et $A \in (ABC)$, on a

$$\begin{aligned} d\left(\Omega, (ABC)\right) &= \left\| p_{\overrightarrow{u_1}}\left(\overrightarrow{\Omega A}\right) \right\| \\ &= \left\| \left\langle \overrightarrow{\Omega A}, \frac{\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|} \right\rangle \frac{\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|} \right\| \\ &= \left| \left\langle \overrightarrow{\Omega A}, \frac{\overrightarrow{u_1}}{\|\overrightarrow{u_1}\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right| \\ &= \frac{3}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d\left(\Omega, (ABC)\right) = \sqrt{3}.}$$

22. On a l'équivalence suivante :

$$\Delta : \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 2z + 4 - 4 = 2z \\ z = z \end{cases}.$$

Conclusion,

$$\boxed{E\left(2, 0, 0\right) \text{ est un point de } \Delta \text{ et } \overrightarrow{u_2}\left(1, 2, 1\right) \text{ est un vecteur directeur de } \Delta.}$$

23. Les droites Δ et $\mathcal{D}$ sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.

Méthode 1. D'une part les droites ne sont pas parallèles. En effet, $\overrightarrow{u_2}\left(1, 2, 1\right)$ est un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u_1}\left(1, 1, 1\right)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, on en déduite que les droites Δ et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

D'autre part, les droites ne s'intersectent pas. En effet, soit $M\left(x, y, z\right) \in \mathscr{E}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} \cap \Delta \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists t \in \mathbb{R},\ x = y = z = t \\ \exists s \in \mathbb{R},\ M = E + s\overrightarrow{u_2} = (2 + s, 2s, s) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\left(s, t\right) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} t = 2 + s \\ t = 2s \\ t = s \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\left(s, t\right) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} s = 2 + s \\ s = 2s \\ t = s \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\left(s, t\right) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} 0 = 2 \\ s = 0 \\ t = s = 0 \end{cases} \qquad \text{impossible.} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D} \cap \Delta = \emptyset$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Les droites } \Delta \text{ et } \mathcal{D} \text{ ne sont pas coplanaires.}}$$

Méthode 2. On sait que $O\,(0,0,0)$ est un point de $\mathcal{D}$, $\overrightarrow{u_1}\,(1,1,1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, $E\,(2,0,0)$ est un point de Δ et $\overrightarrow{u_2}\,(1,2,1)$ est un vecteur directeur de Δ. Dès lors,

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \text{ et } \Delta \text{ sont coplanaires} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2} \text{ et } \overrightarrow{OE} \text{ sont coplanaires}\\ &\Leftrightarrow \quad \det\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{OE}\right) = 0.\end{aligned}$$

Or, en développant par rapport à la dernière colonne,

$$\det\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{OE}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(1-2) = -2 \neq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les droites } \Delta \text{ et } \mathcal{D} \text{ ne sont pas coplanaires.}}$$

24. *Méthode 1.* Soit F le projeté orthogonal de Ω sur Δ. Puisque $E\,(2,0,0)$ est un point de Δ et $\overrightarrow{u_2}\,(1,2,1)$ est un vecteur directeur de Δ, on a

$$\begin{aligned} F &= E + p_{\overrightarrow{u_2}}\left(\overrightarrow{E\,\Omega}\right) \\ &= E + \frac{\left\langle \overrightarrow{E\,\Omega}, \overrightarrow{u_2}\right\rangle}{\left\|\overrightarrow{u_2}\right\|^2}\overrightarrow{u_2} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}{1+4+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} d\,(\Omega, \Delta) &= \left\|\overrightarrow{\Omega\,F}\right\| \\ &= \left\| \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \frac{\sqrt{16+1+4}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{21}}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d\,(\Omega, \Delta) = \frac{\sqrt{21}}{3}.}$$

Méthode 2. Soit $F\,(x,y,z)$ le projeté orthogonal de Ω sur Δ. Puisque $E\,(2,0,0)$ est un point de Δ et $\overrightarrow{u_2}\,(1,2,1)$ est un vecteur directeur de Δ, dans le triangle rectangle $EF\Omega$ en notant θ l'angle

$\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{E\,\Omega}\right) = \left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{E\,\Omega}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
|\sin(\theta)| = \frac{F\,\Omega}{E\,\Omega} \qquad \Leftrightarrow \qquad F\,\Omega &= E\,\Omega\,|\sin(\theta)| \\
&= \frac{\|\overrightarrow{u_2}\| \left\|\overrightarrow{E\,\Omega}\right\| \left|\sin\left(\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{E\,\Omega}\right)\right)\right|}{\|\overrightarrow{u_2}\|} \\
&= \frac{\left\|\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{E\,\Omega}\right\|}{\left\|\overrightarrow{E\,\Omega}\right\|} \|\overrightarrow{u_2}\| \\
&= \frac{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{\sqrt{1+4+9}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{d(\Omega, \Delta) = \frac{\sqrt{21}}{3}.}$$

25. Soit $\mathcal{S}'$ la sphère passant par A, B, C et tangente à Δ. On note Ω' le centre de $\mathcal{S}'$, R' son rayon. Puisque la sphère passe par A, B et C, alors Ω' est équidistant de A, B et C i.e. $\Omega' \in \mathcal{D}$. Donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\Omega'(t, t, t)$. De plus, comme dans la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
R'^2 = d\left(\Omega', \Delta\right)^2 = \frac{\left\|\overrightarrow{E\,\Omega'} \wedge \overrightarrow{u_2}\right\|^2}{\|\overrightarrow{u_1}\|^2} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} t-2 \\ t \\ t \end{bmatrix} \wedge \overrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\|^2}{\left\| \overrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\|^2} &= \frac{\left\| \begin{bmatrix} -t \\ 2 \\ t-4 \end{bmatrix} \right\|^2}{1+4+1} \\
&= \frac{t^2 + 4 + (t-4)^2}{6} \\
&= \frac{2t^2 - 8t + 20}{6} \\
&= \frac{t^2 - 4t + 10}{3}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on sait que $R'^2 = A\,\Omega'$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{t^2 - 4t + 10}{3} = R'^2 &= \left\| \begin{bmatrix} t-1 \\ t-2 \\ t-3 \end{bmatrix} \right\|^2 \\
&= (t-1)^2 + (t-2)^2 + (t-3)^2 = t^2 - 2t + 1 + t^2 - 4t + 4 + t^2 - 6t + 9 \\
&= 3t^2 - 12t + 14.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
t^2 - 4t + 10 = 9t^2 - 36t + 42 \qquad &\Leftrightarrow \qquad 8t^2 - 32t + 32 = 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad t^2 - 4t + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad (t-2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \qquad t = 2.
\end{aligned}$$

Conclusion, on a $\boxed{\Omega'(2,2,2)}$, $R' = \sqrt{\frac{t^2-4t+10}{3}} = \sqrt{\frac{4-8+10}{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$ et $\boxed{R' = \sqrt{2}}$.

26. On observe que

$$\Omega\Omega' = \left\| \begin{bmatrix} 2-1 \\ 2-1 \\ 2-1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{3}.$$

Or $(R-R')^2 = \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2 = 5 - 2\sqrt{10} + 2 = 7 - 2\sqrt{10}$. Donc

$$\begin{aligned}
R - R' < \Omega\Omega' \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{5}-\sqrt{2} < \sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2 = 5-2\sqrt{10}+2 < 3 \text{ car } \sqrt{5}-\sqrt{2} \text{ et } \sqrt{3} \text{ sont positifs} \\
&\Leftrightarrow \quad 4 < 2\sqrt{10} \\
&\Leftrightarrow \quad 2 < \sqrt{10} \\
&\Leftrightarrow \quad 4 < 10.
\end{aligned}$$

La dernière assertion étant toujours vraie, on en déduit que $R - R' \leqslant \Omega\Omega'$. Donc l'une des sphère n'est pas incluse dans l'autre ni tangente intérieurement. D'autre part, $\Omega' = \sqrt{3} < \sqrt{5} \leqslant \sqrt{5}+\sqrt{2} = R + R'$ donc les deux sphères ne sont pas disjointes extérieurement ni tangentes extérieurement. Par conséquent les deux sphères s'intersectent en un cercle $\mathcal{C}$ d'axe $\left(\Omega\Omega'\right) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \in \mathcal{S} \\ M \in \mathcal{S}' \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5 \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3 = 5 \\ x^2+y^2+z^2-4x-4y-4z+12 = 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-2 = 0 \\ -2x-2y-2z+12 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-2 = 0 \\ x+y+z-6 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \in \mathcal{S} \\ M \in (ABC). \end{cases}
\end{aligned}$$

Il est logique que $\mathcal{C} \subset (ABC)$ car A, B et C soit trois points communs à $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ et donc sont sur $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}$ est inclus dans (ABC). Par conséquent, le centre du cercle $\Omega''(x,y,z)$ vérifie

$$\Omega'' \in \left(\Omega\Omega'\right) \cap (ABC) \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \Omega''(t,t,t) \\ t+t+t-6 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \Omega''(t,t,t) \\ t = 2 \end{cases}.$$

Dès lors, on constate que $\Omega''(2,2,2) = \Omega'$. Enfin, en notant r le rayon du cercle $\mathcal{C}$ et $M \in \mathcal{C}$, on a $r = \Omega''M = \Omega'M$. Or $M \in \mathcal{C} \subset \mathcal{S}'$ donc $\Omega'M = R'$. Conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{C} \text{ est le cercle de centre } \Omega'(2,2,2) \text{, de rayon } r = R' = \sqrt{2} \text{ et contenu dans le plan} \\ (ABC) : x+y+z-6 = 0 \text{ ou autrement d'axe } \left(\Omega\Omega'\right) : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

FIN