

Commentaires du DS1

Logique, fonctions et bijections

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{70}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1	P2.1	P2.2	P2	P3.1	P3.2	P3.3	P3.4	P3	Total	Note finale
Moyenne	-2,3	3,6	1	0	4,6	7,6	1,2	8,8	12,1	3,6	2,1	0,1	17,8	29	9,67
Sur		8	12	3	23	23	9	32	21	19	14	6	60	115	20

TOTAL : 115 pt

Problème I - Logique **23 pt**

L'objectif de ce problème est de déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant la propriété $A(f)$ suivante :

$$A(f) : \ll \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) + f(y)| = |x + y| \gg.$$

Partie 1 : Préliminaires **8 pt**

Pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on définit les assertions suivantes :

$$P(g) : \ll (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x) \text{ OU } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -x) \gg$$

$$Q(g) : \ll \forall x \in \mathbb{R}, (g(x) = x \text{ OU } g(x) = -x) \gg.$$

- 2 pt** Soit $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Enoncer avec des quantificateurs $\overline{P(g)}$ et $\overline{Q(g)}$.

Bien, très peu d'erreurs.

- 1 pt** Quelle assertion implique l'autre ? *Aucune justification n'est ici exigée.*

Une moitié de bonnes réponses.

- 2 pt** Démontrer par un exemple que la réciproque est fausse en général.

Certains ont mal compris la question et on donner une implication $A \Rightarrow B$, où l'implication directe est vraie et la réciproque est fausse, ici il était demandé de montrer que $Q(g) \Rightarrow P(g)$ est fausse en trouvant une fonction g pour laquelle $Q(g)$ est vraie mais $P(g)$ est fausse. Très peu de bonnes réponses et encore moins de réponses rédigées.

Pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose également

$$R(g) : \ll \forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| = |x| \gg.$$

- 1 pt** A quelle assertion est équivalente $R(g)$? *Aucune justification n'est ici exigée.*

Quelques bonnes réponses.

- 2 pt** Donner un exemple simple de fonction f vérifiant $A(f)$

Plusieurs bonnes réponses bien rédigées et au contraire des réponses donnant juste la fonction f sans justifier pourquoi cette fonction vérifiait $A(f)$.

Partie 2 : Conséquence de $A(f)$ 12 pt

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $A(f)$ soit vraie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|.$$

6. 2 pt Montrer alors que $f(0) = 0$.

Plusieurs ont pris $f = \text{Id}$ (leur réponse à la question précédente). Ici la fonction f vérifiait $A(f)$ mais sinon devait rester quelconque ! Une poignée de belles réponses et sinon beaucoup d'arnaques qui ne rapportent évidemment aucun point et qui sont même à proscrire de vos copies !

7. 2 pt En déduire que $R(f)$ est vraie.

Encore moins de réponses.

8. On suppose dans cette question (et dans cette question uniquement) que $P(f)$ est fausse.

- (a) 2 pt Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ **non nul** tel que $f(x) \neq x$ et qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ **non nul** tel que $f(y) \neq -y$.

Plusieurs n'ont pas justifié le caractère non nul des réels ce qui est pourtant le coeur de la question. D'autres ont essayé une justification verbeuse et vaseuse. Aucune bonne réponse.

- (b) 2 pt Montrer que $f(x) = -x$ et $f(y) = y$.

Peu de tentatives, une seule bonne réponse.

- (c) 2 pt A l'aide de $A(f)$, en déduire une contradiction.

Aucune bonne réponse.

9. 2 pt Justifier $P(f)$ est vraie.

Une seule bonne réponse, pourtant vu le résultat donné à la question précédente (que l'on pouvait admettre), la question est relativement facile.

Partie 3 : Conclusion 3 pt

10. 3 pt En précisant le raisonnement utilisé, déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $A(f)$.

Une seule tentative.

Problème II - Fonctions réelles 32 pt

L'objectif de ce problème est de résoudre qualitativement l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in]0; +\infty[$:

$$(E) \quad x^{x+1} = (x+1)^x$$

Partie 1 : Étude d'une fonction 23 pt

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \ln(x) - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

où $\mathcal{D}_f$ désigne son ensemble de définition.

1. **2 pt** Déterminer avec soin l'ensemble $\mathcal{D}_f$.

Il me manque encore beaucoup de « Soit $x \in \mathbb{R}$. » même si les efforts sont bien plus importants que dans les interros, nous progressons à grands pas. Plusieurs m'ont exigé $\ln(x) > 0$ à la place de $x > 0$ (ou ont mis $x > 0$ à la ligne d'après...) Beaucoup de bizarreries qui laissent penser que $\frac{1}{x} \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -1$ ce qui est bien sûr complètement faux pour $x \in]-1; 0[$ par exemple. Plusieurs ont oublié aussi de prendre $x \neq 0$ au début (il y a tout de même un quotient dans le second logarithme qu'il ne faut pas négliger).

2. **2 pt** Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, puis vérifier que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{1 + x \ln(x)}{x} + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)$$

Ok souvent pour la dérivabilité. Pas mal de bonnes réponses. Pour ceux qui n'y sont pas parvenus, il faut encore s'entraîner à dériver.

3. **4 pt** Déterminer les limites de la fonction f' en 0^+ et $+\infty$.

Question difficile. J'ai eu beaucoup d'arnaques ou de parachutages ou des formes indéterminées qui n'ont pas été vues. A reprendre calmement avec le corrigé.

4. (a) **1 pt** Justifier que la fonction f' est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

Un point gratuit récupéré par pratiquement tout le monde.

- (b) **2 pt** Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f''(x) < 0$.

Question un peu calculatoire, peu sont allés jusqu'au bout. Là encore le calcul, il faut s'entraîner pour y parvenir.

5. **2 pt** En déduire le tableau de variations complet de la fonction f' .

Beaucoup de parachutage non rédigé! Je n'ai pas trop sanctionné le manque de rédaction mais ce ne sera pas le cas pour les prochains DS...

6. **2 pt** Montrer que pour tout $t \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$.

Comme vu en classe, on pose $h : t \mapsto t - \ln(1+t)$ par exemple. Seuls deux ou trois dans la classe y ont pensé pourtant nous l'avions fait en classe.

7. **2 pt** En déduire que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \ln(x) - 1 \leq f(x) \leq \ln(x)$$

Une ou deux bonnes réponses seulement.

8. **2 pt** Justifier alors que la fonction f admet une limite en 0^+ et en $+\infty$, puis en préciser les valeurs.

Quelques-uns ont reconnu le théorème des gendarmes. D'autres ont tenté le calcul direct mais sans y parvenir.

9. **2 pt** La courbe $\mathcal{C}_f$ de f admet-elle des asymptotes verticales, horizontales ou obliques?

Justifier, et donner une équation des éventuelles asymptotes.

De belles réponses. Attention pour l'asymptote verticale c'est $x = 0$ et non $y = 0$. Plusieurs ont oublié de regarder en 0.

10. **2 pt** Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f .

Là aussi trop de tableaux directement parachutés sans aucune rédaction...

Partie 2 : Résolution qualitative de l'équation (E) 9 pt

11. **2 pt** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que résoudre l'équation (E) est équivalent à résoudre une équation ne dépendant que de $f(x)$.

Quelques belles réponses mais assez peu.

12. **2 pt** En déduire que l'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera α .

Deux ou trois belles réponses.

13. **2 pt** Montrer que $\alpha \in]2; 3[$.

Idem.

14. **3 pt** Tracer avec grand soin :

- (i) en vert, les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ,
- (ii) en rouge, les courbes respectives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \ln(x) - 1$,
- (iii) en bleu, la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .

Placer également α .

Ceux qui ont tenté un dessin ont souvent été récompensés.

Problème III - Bijections 60 pt

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 16}{2x}.$$

Partie 1 : Etude de f 21 pt

1. **2 pt** Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f .

Bien. Quelques étudiants en grandes difficultés, il faut absolument savoir répondre à cette question.

2. **3 pt** Déterminer la parité de f . Que peut-on en déduire sur son graphe ?

Bien dans l'ensemble, vous pensez bien à dire que si $x \in \mathcal{D}$ alors $-x \in \mathcal{D}$. A ce propos, gardez bien les notations de l'énoncé, $\mathcal{D}$ n'est pas $\mathcal{D}_f$. L'interprétation géométrique n'est malheureusement pas toujours donnée.

3. **2 pt** Calculer la dérivée de f sur $U =]0; +\infty[$.

Quelques erreurs de calcul mais aussi de bonnes réponses. N'oubliez pas de simplifier votre résultat.

4. **2 pt** Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point $x = 1$.

Bien pour ceux qui avaient réussi la question précédente. N'hésitez pas à dire que f est dérivable en 1 et donc admet une tangente en 1.

5. **2 pt** Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation.

Moyennement réussie, des limites pas toujours bien justifiées et surtout des conclusions ou des méthodes pas toujours correctes. A retravailler.

6. **2 pt** Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.

De bonnes réponses mais attention à la rédaction et à la justification.

7. **2 pt** Déterminer le tableau de variations complet de f sur U .

Là encore, la rédaction manque. On justifie en citant bien les questions que l'on utilise pour connaître le signe de f' et les valeurs aux bornes.

8. **2 pt** En déduire le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}$.

Des bonnes réponses mais là aussi il faut absolument expliquer par une petite phrase ce que l'on fait.

9. **2 pt** En déduire

$$f(]-4; 0[\cup]0; 4]) \quad \text{et} \quad f(]0; 8]).$$

Peu de bonnes réponses. Des erreurs qui auraient dû être soignées dans la préparation.

10. **2 pt** Préciser également

$$f^{\leftarrow}(\mathbb{R}_+) \quad \text{et} \quad f^{\leftarrow}(]4; +\infty[).$$

Idem.

Partie 2 : Etude de f^{-1} **19 pt**

11. **2 pt** Démontrer que f définit une bijection de $I =]0; 4]$ dans un ensemble J à déterminer. On note g sa fonction réciproque.

De bonnes réponses mais il me manque souvent une hypothèse ou la citation du théorème ou de façon générale l'utilisation et surtout l'obtention de J manque trop souvent de clarté.

12. **2 pt** Préciser, sans calcul, le tableau de variation de g .

Encore une fois, il faut justifier par une phrase comment l'on obtient le tableau de g . Attention g va de J dans I et non l'inverse.

13. **2 pt** Démontrer que g est dérivable sur $J' = J \setminus \{4\}$.

Très peu de réponses exactes. Beaucoup de méconnaissances du théorème. Plusieurs bricolent « g dérivable si f' ne s'annule pas » Cela ne suffit pas. Il faut citer toutes les hypothèses (et rien que les hypothèses), puis citer le théorème et enfin les conséquences.

14. **2 pt** Calculer $g(5)$.

Plusieurs belles réponses. N'oubliez pas de présenter votre variable x .

15. **2 pt** En déduire $g'(5)$.

Beaucoup moins réussie. Plusieurs ont vu ce qu'il fallait faire cependant mais n'avez pas tous les éléments pour conclure.

16. **3 pt** Montrer que pour tout $y \in J'$,

$$y + \sqrt{y^2 - 16} > 4 \quad \text{et} \quad y - \sqrt{y^2 - 16} < 4.$$

Quelques-uns ont réussi la première mais se sont trompés sur la seconde. A revoir, question qui reste très abordable.

17. **2 pt** En déduire pour tout $y \in J$ la valeur de $g(y)$.

De bonnes premières parties de réponses mais une ou deux réponses complètes seulement.

18. **2 pt** Retrouver le résultat de la question 13. et calculer g' sur J' .

Peu traitée.

19. **2 pt** Retrouver le résultat de la question 15.

Peu traitée.

Partie 3 : Etude d'une suite récurrente 14 pt

Soit $x_0 \in [4; +\infty[$. On pose $u_0 = x_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 16}{2u_n}$.

20. Soit $x > 0$. On considère l'implication $I : (x \geq 4) \Rightarrow (f(x) \geq 4)$.

(a) 2 pt Justifier que I est vraie.

Plusieurs bonnes réponses et au contraire des réponses mal justifiées.

(b) 2 pt Enoncer mathématiquement la réciproque, la négation et la contraposée de I . Dans chaque cas, préciser sa valeur de vérité.

Décevant, cette question est très facile mais n'a pas toujours été bien réussie. Il fallait aussi donner les valeurs de vérité. Vu que l'on nous disait que I est vraie, on en déduit directement que $\bar{I}$ est fausse et que la contraposée de I est vraie ! Finalement, il n'y avait que pour la réciproque qu'il fallait réfléchir.

21. 2 pt Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4$.

Une récurrence était attendue. Un ou deux réponses correctes. Il faut absolument savoir rédiger une récurrence.

22. 2 pt Pour tout $x \geq 4$, on pose $h(x) = f(x) - x$. Calculer $h(x)$ et préciser son signe.

Question facile mais peu abordée et même quand elle est abordée le signe est souvent laborieux dans vos réponses alors que cela ne doit pas poser de difficulté.

23. 2 pt En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Une petite poignée de bonnes réponses.

24. 2 pt En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on note ℓ sa limite.

Deux ou trois belles réponses. Il fallait citer le théorème de convergence monotone.

25. 2 pt Exprimer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 + 16}{2u_n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ en fonction de ℓ puis en déduire que $\ell = 4$.

Une belle réponse.

Partie 4 : Une équation fonctionnelle 6 pt

On cherche à déterminer $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $\varphi : [4; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$(E) \quad \forall x \in [4; +\infty[, \quad \varphi(x) = \varphi\left(\frac{x^2 + 16}{2x}\right).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{E}$.

26. 2 pt On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \varphi(u_n)$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante.

Une seule bonne réponse.

27. 2 pt En déduire que $\varphi(x_0) = \varphi(4)$.

Non traitée.

28. 2 pt Conclure en déterminant $\mathcal{E}$.

Non traitée.