

Corrigé du Devoir Surveillé 1

Logique, fonctions réelles et bijections

Problème I - Logique

L'objectif de ce problème est de déterminer l'ensemble des fonctions f vérifiant la propriété $A(f)$ suivante :

$$A(f) : \ll \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) + f(y)| = |x + y| \gg.$$

Partie 1 : Préliminaires

Pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on définit les assertions suivantes :

$$P(g) : \ll (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x) \text{ OU } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -x) \gg$$

$$Q(g) : \ll \forall x \in \mathbb{R}, (g(x) = x \text{ OU } g(x) = -x) \gg.$$

1. Pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a directement

$$\begin{cases} \overline{P(g)} : & \ll (\exists x \in \mathbb{R}, g(x) \neq x) \text{ ET } (\exists y \in \mathbb{R}, g(y) \neq -y) \gg \\ \overline{Q(g)} : & \ll \exists x \in \mathbb{R}, (g(x) \neq x \text{ ET } g(x) \neq -x) \gg. \end{cases}$$

2. Pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $P(g) \Rightarrow Q(g)$.

3. Prenons $g = |\cdot| : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto |x| \end{cases}$. Alors on observe que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = x \text{ (cas où } x \text{ est positif)} \quad \text{OU} \quad g(x) = -x \text{ (cas où } x \text{ est négatif)}.$$

Autrement dit $Q(g)$ est vraie. Pourtant si $x = -1$ alors $g(-1) = 1 \neq -1$ et si $y = 1$ alors $g(1) = 1 \neq -1$. Ainsi

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ (par exemple } x = 1) \text{ tel que } g(x) \neq x$$

ET

$$\exists y \in \mathbb{R} \text{ (par exemple } y = -1) \text{ tel que } g(y) \neq -y.$$

Donc $\overline{P(g)}$ est vraie. On a donc montré dans ce cas $Q(g)$ ET $\overline{P(g)}$ i.e. la négation de $Q(g) \Rightarrow P(g)$.

Conclusion,

$$\text{lorsque } g = |\cdot| \text{ alors } Q(g) \Rightarrow P(g) \text{ est fausse.}$$

Pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose également

$$R(g) : \ll \forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| = |x| \gg.$$

4. Pour tout $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $R(g) \Leftrightarrow Q(g)$.

5. Si $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ (i.e. si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$) alors on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x) + f(y)| = |x + y|.$$

Donc $A(f)$ est vraie. Conclusion, si $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ alors $A(f)$ est vraie.

Partie 2 : Conséquence de $A(f)$

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $A(f)$ soit vraie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|.$$

6. Si $x = y = 0$, on a

$$|f(0) + f(0)| = |0 + 0|$$

Donc $2|f(0)| = 0$ autrement dit $f(0) = 0$. Conclusion $\boxed{f(0) = 0}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. En prenant $y = 0$ dans $A(f)$, on a

$$|f(x) + f(0)| = |x + 0|.$$

Or d'après la question précédente, $f(0) = 0$. Donc $|f(x)| = |x|$. Comme x est quelconque, on conclut que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| = |x|}.$$

i.e. $\boxed{R(f) \text{ est vraie}}$.

8. On suppose dans cette question que $P(f)$ est fausse.

(a) Par hypothèse $P(f)$ est fausse donc $\overline{P(f)}$ est vraie. Donc d'après la question 1,

$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x \text{ ET } \exists y \in \mathbb{R}, f(y) \neq -y.$$

On a donc $f(x) \neq x$. Or d'après la question 6, $f(0) = 0$. Donc $x \neq 0$. De même $f(0) = 0 = -0$ et $f(y) \neq -y$. Donc $y \neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R}^*, f(x) \neq x \text{ ET } \exists y \in \mathbb{R}^*, f(y) \neq -y}.$$

(b) On sait que $f(x) \neq x$ mais on sait également d'après la question 7 que $|f(x)| = |x|$. Donc nécessairement $f(x) = -x$. De même on sait que $f(y) \neq -y$ et $|f(y)| = |y|$ donc $f(y) = y$. Conclusion, $\boxed{f(x) = -x \text{ et } f(y) = y}$.

(c) D'après $A(f)$, on a notamment pour le x et le y précédemment définis

$$|f(x) + f(y)| = |-x + y| = |x + y|.$$

Deux cas possibles. Premier cas, $-x + y = x + y$ i.e. $-x = x$ et donc $x = 0$, ce qui est impossible car $x \in \mathbb{R}^*$. Second cas $-(-x + y) = x + y$ i.e. $x - y = x + y$ ou encore $-y = y$ et donc $y = 0$, ce qui est à nouveau impossible car on a également $y \in \mathbb{R}^*$. Donc dans tous les cas, $\boxed{\text{on arrive à une contradiction}}$.

9. En procédant par l'absurde, nous avons montré qu'il était impossible que $P(f)$ soit fausse. Donc $\boxed{P(f) \text{ est vraie}}$.

Partie 3 : Conclusion

10. Raisonnons par analyse-synthèse. Analyse : si f est telle que $A(f)$ est vraie alors nous avons établi dans la partie 1 que nécessairement $P(f)$ est vraie autrement dit $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ ou $f = -\text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Synthèse : si $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ alors nous avons montré à la question 5 que $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ est bien une solution. De même si $f = -\text{Id}_{\mathbb{R}}$, alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) + f(y)| = |-x - y| = |x + y|.$$

Donc $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ est aussi une solution.

Conclusion $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie $A(f)$ si et seulement si $(f = \text{Id}_{\mathbb{R}}) \text{ OU } (f = -\text{Id}_{\mathbb{R}})$.

Problème II - Fonctions réelles

Partie 1 : Étude d'une fonction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\iff f(x) \text{ existe} \iff \begin{cases} \ln(x) \text{ existe} \\ x \ln(1 + \frac{1}{x}) \text{ existe} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_*^+ \\ x \text{ et } 1 + \frac{1}{x} \text{ existent} \\ x + \frac{1}{x} \in \mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_*^+ \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ \frac{x+1}{x} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\end{cases} \\ &\iff x \in \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_*^+$.

2. Un raisonnement analogue au précédent permet de montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.
Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} - \left(x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + 1 \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln(x) \\ &= \frac{1+x \ln(x)}{x} + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) \end{aligned}$$

Conclusion : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, f'(x) = \frac{1+x \ln(x)}{x} + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

– Calculons :

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1 + \overbrace{x \ln(x)}^{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ par croissance comparée}}}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty} + \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1} - \underbrace{\ln(x+1)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0}$$

Ainsi, il vient que :

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$.

– Calculons :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1+x \ln(x)}{x} + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) \\ &= \frac{1}{x} + \ln(x) + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) = 0$. Ainsi, il vient que :

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

4. (a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ par opérations élémentaires de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$.

Conclusion : la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. On observe que

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) + \frac{1}{x+1} - \ln(x+1).$$

On a alors les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{-(x+1)^2 + x(x+1)^2 - x^2 - x^2(x+1)}{x^2(x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x - 1 + x^3 + 2x^2 + x - x^2 - x^3 - x^2}{x^2(x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2 - x - 1}{x^2(x+1)^2} \\ &= -\frac{x^2 + x + 1}{x^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $x^2 > 0$ et $(1+x)^2 > 0$ et $x^2 + x + 1 > 0$. Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, f''(x) < 0.$$

5. On en déduit alors le tableau de signes et de variations suivants, que l'on complète à l'aide de la question (b) :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	
f'	$+\infty$	0

6. Posons pour tout réel $t > -1$: $g(t) = \ln(1+t) - t$.

Par somme et composition, la fonction g est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et l'expression de sa dérivée vaut :

$$\forall t > -1, g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}$$

On en déduit les tableaux de signes et de variations suivants :

t	-1	0	$+\infty$
$g'(t)$	$ $	$\begin{smallmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{smallmatrix}$	$-$
g	$-\infty$	0	$-\infty$

NB : la donnée des limites n'était pas obligatoire.

La lecture du tableau de variations permet de savoir que la fonction g est négative sur $] -1, +\infty[$, autrement dit :

Conclusion : $\forall t > -1, \underbrace{\ln(1+t)}_{(*)} \leq t.$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Montrons que $\ln(x) - 1 \underset{(i)}{\leq} f(x) \underset{(ii)}{\leq} \ln(x).$

(ii) On a les déductions suivantes :

$$\begin{aligned}
 x &> 0 \\
 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} &> 1 \\
 \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &> \ln(1) \quad \text{par croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_*^+ \\
 \Rightarrow -x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &< 0 \quad \text{car } -x < 0 \\
 \Rightarrow \ln(x) - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &< \ln(x) \\
 \Rightarrow f(x) &\leq \ln(x)
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien démontré (ii).

(i) L'inégalité (*) précédemment démontrée étant vraie pour tout $t > -1$, elle est en particulier vraie pour $t = \frac{1}{x} > 0 > -1$, ce qui permet d'écrire les déductions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &\leq \frac{1}{x} \\
 \Rightarrow -x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &\geq -1 \quad \text{car } -x < 0 \\
 \Rightarrow \ln(x) - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &\geq \ln(x) - 1 \\
 \Rightarrow f(x) &\geq \ln(x) - 1
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien démontré (i).

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \ln(x) - 1 \leq f(x) \leq \ln(x).$

8. – Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, le théorème de majoration permet de conclure que :

la fonction f admet une limite en 0^+ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$

- Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$, le théorème de minoration permet de conclure que :

la fonction f admet une limite en $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

9. Les bornes ouvertes de l'ensemble de définition de la fonction f étant 0 et $+\infty$, on effectue l'étude asymptotique suivante :

- (*Recherche d'une asymptote verticale en 0^+*)

Sachant que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, il vient que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

- (*Recherche d'une asymptote horizontale en $+\infty$*)

Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il vient que la courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale.

- (*Recherche d'une asymptote oblique en $+\infty$*)

Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il vient que la courbe $\mathcal{C}_f$ PEUT admettre une asymptote oblique.

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Calculons :

$$\frac{f(x)}{x} = \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ par CC}} - \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$$

Si $\mathcal{C}_f$ admettait une asymptote oblique, alors cette asymptote oblique aurait pour équation

$y = ax + b$ avec $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, $\mathcal{C}_f$ aurait une asymptote horizontale, ce qui contredit le point précédent. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote oblique mais une branche parabolique de direction (Ox) .

Conclusion : la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une direction parabolique horizontale en $+\infty$.

10. On en déduit alors le tableau de signes et de variations suivants :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$		–
f'	$+\infty$	0
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

Partie 2 : Résolution qualitative de l'équation (E)

11. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (E) &\iff x^{x+1} = (x+1)^x \\
 &\iff \ln(x^{x+1}) = \ln((x+1)^x) \quad \text{car } x^{x+1} > 0 \text{ et } (x+1)^x > 0 \\
 &\iff (x+1)\ln(x) = x\ln(x+1) \\
 &\iff (x+1)\ln(x) - x\ln(x+1) = 0 \\
 &\iff \ln(x) - [x\ln(x+1) - x\ln(x)] = 0 \\
 &\iff \ln(x) - x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0 \\
 &\iff f(x) = 0
 \end{aligned}$$

Conclusion : $(E) \iff f(x) = 0$.

12. On a montré que la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_*^+$, donc par le théorème de la bijection, la fonction $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow f(\mathbb{R}_*^+) = \mathbb{R}$ est bijective.

Ainsi, $0 \in \mathbb{R}$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}_*^+$ par f .

Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_*^+$. D'après la question précédente,

l'équation (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}_*^+$.

13. Montrons que $\alpha \in]2, 3[$.

Il suffit de montrer que $f(2) < 0 < f(3)$.

– Calculons :

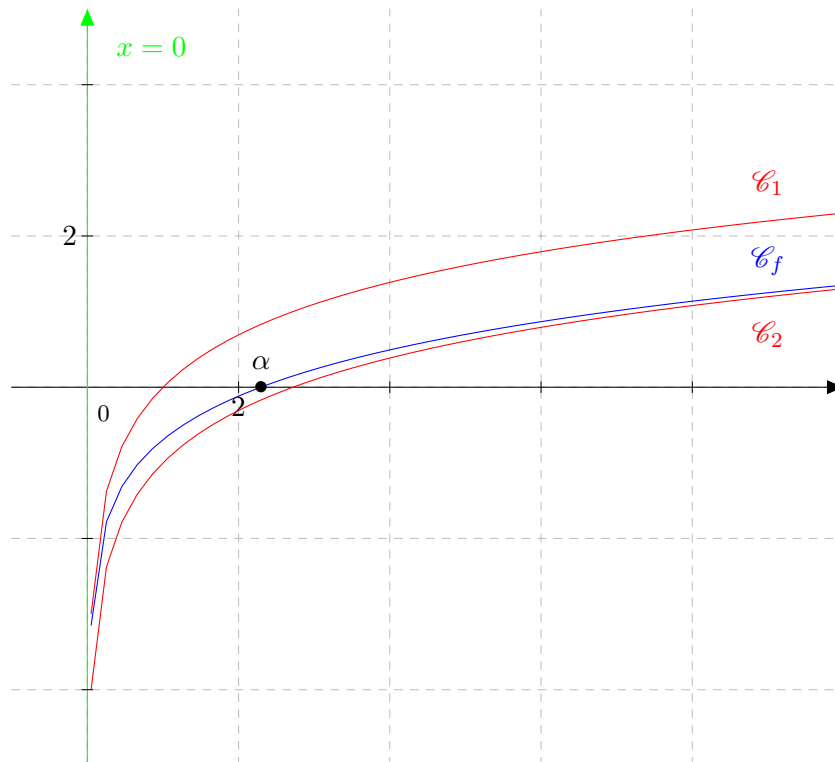
$$f(2) = \ln(2) - 2\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln(2) - \ln\left(\frac{9}{4}\right) = \ln\left(\frac{8}{9}\right) < 0 \quad \text{car } \frac{8}{9} < 1$$

– Calculons :

$$f(3) = \ln(3) - 3\ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \ln(3) - \ln\left(\frac{64}{27}\right) = \ln\left(\frac{81}{64}\right) > 0 \quad \text{car } \frac{81}{64} > 1$$

Conclusion : $\alpha \in]2, 3[$.

14. Voici les tracés demandés :



Problème III - Bijections

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 16}{2x}.$$

Partie 1 : Etude de f

- Déterminons $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f . Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$x \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad 2x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$

Conclusion, la fonction f est définie sur

$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}^*}.$$

- Déterminons la parité de f et précisons une conséquence sur son graphe.

- L'ensemble $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ est centré en 0 : $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$.
- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 16}{-2x} = -\frac{x^2 + 16}{2x} = -f(x).$$

Par ces deux points, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

Par suite,

$$\boxed{\text{son graphe est symétrique par la symétrie d'axe } (Oy)}.$$

3. Calculons la dérivée de f sur $U =]0; +\infty[$. Pour tout $x \in U$, $2x \neq 0$, on note donc que f est dérivable sur U en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in U, \quad f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{2x \times x - (x^2 + 16)}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - x^2 - 16}{2x^2} \\ &= \frac{x^2 - 16}{2x^2}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in U, \quad f'(x) = \frac{x^2 - 16}{2x^2}.$$

4. Déterminons l'équation de la tangente au graphe de f au point $x = 1$. On a vu à la question précédente que f est dérivable sur U et donc en 1 et donc le graphe de f admet bien une tangente au point 1 dont l'équation est donnée par

$$T : y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Or par définition de f et la question précédente,

$$f(1) = \frac{1 + 16}{2} = \frac{17}{2} \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{1 - 16}{2} = -\frac{15}{2}.$$

Ainsi,

$$T : y = -\frac{15}{2}(x - 1) + \frac{17}{2} = -\frac{15}{2}x + \frac{15 + 17}{2} = -\frac{15}{2}x + \frac{32}{2} = -\frac{15}{2}x + 16.$$

Conclusion,

$$\boxed{T : y = -\frac{15}{2}x + 16.}$$

5. Montrons que f admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation. Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \frac{x^2 + 16}{2x} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{16}{x^2}\right)}{2x} = \frac{x \left(1 + \frac{16}{x^2}\right)}{2}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{16}{x^2} = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De plus, pour tout $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{1 + \frac{16}{x^2}}{2}$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad f(x) - \frac{x}{2} &= \frac{x^2 + 16}{2x} - \frac{x}{2} \\ &= \frac{x^2 + 16 - x^2}{2x} \\ &= \frac{8}{x}.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Conclusion, le graphe de f admet donc une asymptote en $+\infty$ d'équation

$$\boxed{y = \frac{x}{2}.$$

6. Déterminons $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$. On a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 + 16 = 16 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2x = 0^+.$$

Par quotient,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$$

7. Déterminons le tableau de variations complet de f sur U . Par la question 3.

$$\forall x \in U, \quad f'(x) = \frac{x^2 - 16}{2x^2}$$

Soit $x \in U$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 & \Leftrightarrow x^2 - 16 \geq 0 \quad \text{car } 2x^2 > 0 \\ & \Leftrightarrow x^2 \geq 16 \\ & \Leftrightarrow x \leq -4 \text{ OU } x \geq 4 \\ & \Leftrightarrow x \geq 4 \quad \text{car } x > 0. \end{aligned}$$

La fonction f est donc croissante sur $[4; +\infty[$ et décroissante sur $]0; 4]$. De plus,

$$f(4) = \frac{16 + 16}{8} = 4.$$

Donc par les limites établies aux deux questions précédentes, on obtient :

x	0	4	$+\infty$
f	$+\infty$	4	$+\infty$

8. Dédudisons-en le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}$. On sait que la fonction f est impaire. De la question précédente et la symétrie de centre $(0; 0)$ on obtient directement le tableau suivant :

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$
f	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$

9. Dédudisons-en $f(]-4; 0[\cup]0; 4])$ et $f(]0; 8])$. Par la question précédente, (on fait attention à l'ouverture ou la fermeture des bornes)

$$f(]-4; 0[\cup]0; 4]) =]-\infty; -4[\cup [4; +\infty[.$$

De plus,

$$f(]0; 8]) = [4; +\infty[.$$

10. Précisons également $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{\leftarrow}(]4; +\infty[)$. Toujours par son tableau de variations :

$$f^{\leftarrow}(\mathbb{R}_+) =]0; +\infty[$$

et

$$f^{\leftarrow}(]4; +\infty[) =]0; 4[\cup]4; +\infty[.$$

Partie 2 : Etude de f^{-1}

11. Démontrons que f définit une bijection de $I =]0; 4]$ dans un ensemble J à déterminer. On a par la question 3.

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{x^2 - 16}{2x^2}.$$

Pour tout $x \in]0; 4[$, $x^2 < 16$ et donc $x^2 - 16 < 0$. Dès lors,

$$\forall x \in]0; 4[, \quad f'(x) < 0.$$

Notez l'importance d'ouvrir l'intervalle et d'avoir une inégalité stricte.

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0; 4[$. De plus, f est continue en 4 et donc f est strictement décroissante sur $I =]0; 4]$. Dès lors,

- f est continue sur I (en tant que quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas),
- f est strictement décroissante sur I .

Donc par le théorème de la bijection, f définit une bijection de I dans J où l'intervalle J est donné par

$$J = \left[f(4); \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \right[.$$

Par les questions 6. et 7.

$$J = [4; +\infty[.$$

Conclusion,

$$f \text{ définit une bijection de } I =]0; 4] \text{ dans } J = [4; +\infty[.$$

On note g sa fonction réciproque.

12. Précisons, sans calcul, le tableau de variation de g . Par la question précédente et le théorème de la bijection, on sait que g est continue et de même monotonie que f . Donc g est strictement décroissante sur J et à valeurs dans I . Ainsi,

x	4	$+\infty$
g	4	0

13. Démontrons que g est dérivable sur $J' = J \setminus \{4\}$. On observe les points suivants.

- la fonction f est dérivable sur $I' =]0; 4[= I \setminus \{4\}$,
- la fonction f est strictement décroissante sur I' ,
- pour tout $x \in I'$, $f'(x) = \frac{x^2 - 16}{2x^2} = \frac{(x-4)(x+4)}{2x^2} < 0$ et donc $f'(x) \neq 0$.

Par le théorème de la dérivée de la fonction réciproque,

$$g \text{ est dérivable sur } f(I') = J' =]4; +\infty[.$$

14. Calculons $g(5)$. Soit $x \in I$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x = g(5) &\Leftrightarrow f(x) = 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 16}{2x} = 5 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 16 = 10x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 100 - 64 = 36 = 6^2$. Donc les racines sont $\frac{10+6}{2} = 8$ et $\frac{10-6}{2} = 2$. Or $x \in]0; 4[$. Donc $x = 2$. Conclusion,

$$g(5) = 2.$$

15. Dédisons-en $g'(5)$. Par le théorème de la dérivée de la réciproque, on a vu que g est dérivable sur $]4; +\infty[$ et de plus,

$$\forall y \in]4; +\infty[, \quad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

En particulier, $5 \in]4; +\infty[$ et donc

$$g'(5) = \frac{1}{f'(g(5))}.$$

Par la question précédente,

$$g'(5) = \frac{1}{f'(2)}.$$

Or par la question 3.

$$f'(2) = \frac{2^2 - 16}{2 \times 2^2} = \frac{4 - 16}{8} = -\frac{3}{2}.$$

Conclusion,

$$g'(5) = -\frac{2}{3}.$$

16. Montrons que pour tout $y \in J'$, $y + \sqrt{y^2 - 16} > 4$ et $y - \sqrt{y^2 - 16} < 4$. Soit $y \in J' =]4; +\infty[$. On a l'équivalence suivante :

$$y + \sqrt{y^2 - 16} > 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y^2 - 16} > 4 - y.$$

Or $y > 4$. Donc $4 - y < 0$ et $y^2 - 16 > 0$. *Justification incontournable pour obtenir la réciproque.* Donc

$$\begin{aligned} y + \sqrt{y^2 - 16} > 4 &\Leftrightarrow y^2 - 16 > (4 - y)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 16 > 16 - 8y + y^2 \\ &\Leftrightarrow 8y > 32 \\ &\Leftrightarrow y > 4. \end{aligned}$$

La dernière étant toujours vraie sur J' , on en conclut que

$$\forall y \in J', \quad y + \sqrt{y^2 - 16} > 4.$$

De même, soit $y \in J'$. On a

$$y - \sqrt{y^2 - 16} < 4 \quad \Leftrightarrow \quad y - 4 < \sqrt{y^2 - 16}.$$

Or $y - 4 > 0$ et $y^2 - 16 > 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} y - \sqrt{y^2 - 16} < 4 &\Leftrightarrow (y - 4)^2 < y^2 - 16 \\ &\Leftrightarrow y^2 - 8y + 16 < y^2 - 16 \\ &\Leftrightarrow 32 < 8y \\ &\Leftrightarrow 4 < y. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in J', \quad y - \sqrt{y^2 - 16} < 4.}$$

17. Dédudons-en pour tout $y \in J$ la valeur de $g(y)$. Soient $y \in J = [4; +\infty[$ et $x \in I =]0; 4]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x = g(y) &\Leftrightarrow y = f(x) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 16}{2x} \\ &\Leftrightarrow 2xy = x^2 + 16 \quad \text{CAR } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2yx + 16 = 0. \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = 4y^2 - 4 \times 16 = 4(y^2 - 16)$. Premier cas, si $y = 4$ alors,

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 4)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$

Deuxième cas, $y > 4$ i.e. $y \in J' =]4; +\infty[$. Dans ce cas, $\Delta = 4(y^2 - 16) > 0$ et le trinôme $x^2 - 2yx + 16 = 0$ possède exactement deux racines :

$$x = \frac{2y - \sqrt{4(y^2 - 16)}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 16} \quad \text{et} \quad x = \frac{2y + \sqrt{4(y^2 - 16)}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 16}.$$

Dès lors, si $y > 4$,

$$x = g(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y - \sqrt{y^2 - 16} \quad \text{OU} \quad x = y + \sqrt{y^2 - 16}.$$

Or par la question précédente, $y + \sqrt{y^2 - 16} > 4$ et donc n'est pas solution tandis que $y - \sqrt{y^2 - 16}$ appartient bien à J' . Ainsi, pour tout $y \in J'$,

$$x = g(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y - \sqrt{y^2 - 16}.$$

On note que si $y = 4$, $y - \sqrt{y^2 - 16} = 4 - \sqrt{16 - 16} = 4 = x$. La formule reste donc vraie si $y = 4$. Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in J = [4; +\infty[, \quad g(y) = y - \sqrt{y^2 - 16}.}$$

18. Retrouvons le résultat de la question 13. et calculons g' sur J' . Soit $y \in J$. Par la question précédente,

$$g \text{ est dérivable en } y \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 16 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 > 16,$$

ce qui est vrai pour tout $y \in J'$. Donc

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } J' =]4; +\infty[.}$$

De plus,

$$\forall y \in J', \quad g'(y) = 1 - \frac{2y}{2\sqrt{y^2 - 16}} = 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 16}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in J', \quad g'(y) = 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 16}}.}$$

19. Retrouvons le résultat de la question 15. Puisque $5 \in J'$, par la question précédente, on a

$$g'(5) = 1 - \frac{5}{\sqrt{25-16}} = 1 - \frac{5}{\sqrt{9}} = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 15.

$$g'(5) = -\frac{2}{3}.$$

Partie 3 : Etude d'une suite récurrente

Soit $x_0 \in [4; +\infty[$. On pose $u_0 = x_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 16}{2u_n}$.

20. Soit $x > 0$. On considère l'implication $I : (x \geq 4) \Rightarrow (f(x) \geq 4)$.

- (a) Justifions que I est vraie. Par la question 8. on a directement que pour tout $x \geq 4$, $f(x) \geq 4$.
Conclusion,

I est vraie.

- (b) Enonçons mathématiquement la réciproque, la négation et la contraposée de I et dans chaque cas, précisons sa valeur de vérité.

Sa réciproque est donnée par

$$(f(x) \geq 4) \Rightarrow (x \geq 4).$$

Toujours par la question 8. on note que pour tout $x \in]0; 4[$, on a également $f(x) \geq 4$. Donc si $f(x) \geq 4$ cela ne veut pas dire que $x \geq 4$. Ainsi,

la réciproque de I est fausse.

La contraposée de I est

$$(f(x) < 4) \Rightarrow (x < 4).$$

Puisqu'une contraposée a la même valeur de vérité que l'implication initiale, on en déduit que

la contraposée de I est vraie.

Enfin, la négation de I est donnée par

$$(f(x) \geq 4) \text{ ET } (x < 4).$$

Puisque I est vraie, nécessairement sa négation est fausse. Conclusion,

la négation de I est fausse.

21. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4$. Procédons par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : « u_n \geq 4 »$.

Initialisation. Si $n = 0$, par définition, $u_0 = x_0 \geq 4$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie alors $u_n \geq 4$. Donc par la question précédente,

$$f(u_n) \geq 4.$$

Autrement dit,

$$\frac{u_n^2 + 16}{2u_n} \geq 4 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq 4.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 4.$$

22. Pour tout $x \geq 4$, on pose $h(x) = f(x) - x$. Calculons $h(x)$ et précisons son signe. Pour tout $x \geq 4$, on a

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - x \\ &= \frac{x^2 + 16}{2x} - x \\ &= \frac{x^2 + 16 - 2x^2}{2x} \\ &= \frac{16 - x^2}{2x} \\ &= \frac{(4 - x)(4 + x)}{2x}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in [4; +\infty[, \quad h(x) = \frac{(x + 4)(4 - x)}{2x}.$$

Or pour tout $x \geq 4$, $x + 4 \geq 0$, $4 - x \leq 0$ et $2x > 0$. Par produit,

$$\forall x \in [4; +\infty[, \quad h(x) \leq 0.$$

23. Dédudons-en que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4$. Donc en prenant $x = u_n \geq 4$, on a par la question précédente,

$$h(u_n) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(u_n) - u_n \leq 0.$$

Or $f(u_n) = \frac{u_n^2 + 16}{2u_n} = u_{n+1}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en conclut que

$$\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

24. Dédudons-en que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On sait par la question 21. que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée. De plus par la question précédente, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Conclusion, par le théorème de convergence monotone,

$$\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}$$

On note ℓ sa limite.

25. Exprimons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 + 16}{2u_n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ en fonction de ℓ puis déduisons-en que $\ell = 4$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, alors par composée de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^2 + 16}{2u_n} = \frac{\ell^2 + 16}{2\ell}.$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 16}{2u_n}$ donc par passage à la limite, on obtient

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{\ell^2 + 16}{2\ell} \Rightarrow 2\ell^2 = \ell^2 + 16 \\ &\Rightarrow \ell^2 = 16 \\ &\Rightarrow \ell = 4 \text{ OU } \ell = -4. \end{aligned}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4$. Donc par passage à la limite, $\ell \geq 4$. Conclusion,

$$\ell = 4.$$

Partie 4 : Une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $\varphi : [4; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$(E) \quad \forall x \in [4; +\infty[, \quad \varphi(x) = \varphi\left(\frac{x^2 + 16}{2x}\right).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{E}$.

26. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \varphi(u_n)$. Montrons que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \varphi(u_{n+1}) && \text{par définition de la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \varphi\left(\frac{u_n^2 + 16}{2u_n}\right) && \text{par définition de la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ &= \varphi(u_n) && \text{car } \varphi \in \mathcal{E} \\ &= v_n. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ne déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est constante.}}$$

27. Par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0.$$

Or d'une part, $v_0 = \varphi(u_0) = \varphi(x_0)$. D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \varphi(u_n).$$

Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 4 et φ est continue sur $[4; +\infty[$ donc en 4 et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(u_n) = \varphi(4).$$

Ainsi, en passant à la limite sur $v_n = v_0$:

$$\varphi(x_0) = v_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \varphi(4).$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi(x_0) = \varphi(4)}.$$

28. Concluons en déterminant $\mathcal{E}$. *Analyse.* Soit $\varphi \in \mathcal{E}$ et $x_0 \in [4; +\infty[$. Par ce qui précède, on observe que

$$\varphi(x_0) = \varphi(4).$$

Ceci étant vrai pour $x_0 \in [4; +\infty[$ quelconque, on en déduit que

$$\forall x_0 \in [4; +\infty[, \quad \varphi(x_0) = \varphi(4).$$

Ainsi, si $\varphi \in \mathcal{E}$, alors φ est constante sur $[4; +\infty[$.

Synthèse. Réciproquement, si φ est une fonction constante sur $[4; +\infty[$:

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [4; +\infty[, \quad \varphi(x) = K.$$

Alors, pour tout $x \in [4; +\infty[$, par la 20.a on sait que $f(x) \geq 4$, donc en posant $y = f(x)$, on a $y \geq 4$ et donc $\varphi(y) = K$. Ainsi,

$$\varphi(x) = K = \varphi(y) = \varphi(f(x)) = \varphi\left(\frac{x^2 + 16}{2x}\right).$$

Donc on a bien $\varphi \in \mathcal{E}$.

Conclusion, l'ensemble $\mathcal{E}$ est formé de l'ensemble des fonctions constante :

$$\mathcal{E} = \left\{ f : \begin{array}{ccc} [4; +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K \end{array} \mid K \in \mathbb{R} \right\}.$$