Commentaires du DS2
Trigonométrie, complexes et calcul algébrique

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{70}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.0	P1.1	P1.2	P1.3	P1	P2.1	P2.2	P2	P3.1	P3.2	P3.3	P3.4	P3.5	P3.6	P3	Total	Note finale
Moyenne	-1,7	4,3	3,8	2,6	0,9	11,7	5,7	1,2	6,8	3,7	0,4	3,8	0,8	0,2	0	8,8	25,7	8,79
Sur		6	12	16	6	40	18	27	45	14	6	12	8	8	12	60	145	20

TOTAL : 145 pt

Problème I - Trigonométrie 40 pt

6 pt

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   (a) **2 pt** Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.
   Facile, bien réussie. Certains en sont restés à $\cos^2(x) - \sin^2(x)$. On demandait plutôt du cosinus.

   (b) **2 pt** Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
   Travaillée à de nombreuses reprises en classe. Bien pour la grande majorité. Pour ceux qui n'y sont pas parvenus, il faut vraiment revoir ses méthodes d'apprentissage, une question si usée en cours ne doit plus poser de problème.

   (c) **2 pt** Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ uniquement.
   Idem.

Partie 1 : Première méthode 12 pt

On pose $\theta = \frac{\pi}{5}$.

2. **2 pt** Calculer $\cos(2025\theta)$.
   Bien. Plusieurs ont décomposer 2025 en 45×5 au lieu de 405×5.

3. **2 pt** Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.
   Aucune bonne réponse. La question n'est pas si dure mais il fallait penser à utiliser que $\theta = \frac{\pi}{5}$ ce que personne n'a fait. Vous avez souvent paraphraser la question 2.

4. **2 pt** En déduire une équation vérifiée par $\cos(\theta)$.
   Non traitée.

5. **2 pt** Déterminer trois réels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $4X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = (X+1)\left(aX^2 + bX + c\right)$.
   Bien globalement ! Attention dans la rédaction, ce n'est pas des équivalents jusqu'au bout. Dîtes plutôt IL SUFFIT au moment où vous posez le système des deux équations.

6. **2 pt** En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
   Quelques-uns ont parachuté que $X = \cos(\theta)$ sans que cela soit clair. Vous pouviez admettre que le résultat de la question 4 était $4X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = 0$ mais écrivez-le clairement. Certains l'ont fait à bon escient.

7. **2 pt** En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
   Quelques bonnes méthodes mais un calcul un peu technique, aucune réponse parfaite.

Partie 2 : Deuxième méthode $\boxed{16 \text{ pt}}$

8. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.

   Facile ! Et pourtant pas toujours très réussie j'ai vu des horreurs comme du $\frac{\pi}{2}$ ou l'oubli de la moitié des solutions.

9. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, $(2\cos(\varphi) + 1)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)$.

   Assez bien globalement.

10. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\varphi \in]0; 2\pi[$, on a

$$\cos(a) + \cos(a+\varphi) + \cos(a + 2\varphi) = \cos(a+\varphi)\frac{\sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

   Plusieurs bonnes réponses mais personne ne pense à justifier la division de $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ à l'aide de la question 8.

11. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En prenant $a = \theta$ et $\varphi = 2\theta$, montrer que $\cos(\theta) + \cos(3\theta) = \frac{1}{2}$.

   Aucune bonne réponse. Vous injectez bien les θ mais vous ne parvenez pas bien à utiliser que $\theta = \frac{\pi}{5}$.

12. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Linéariser $\cos(\theta)\cos(3\theta)$.

   Facile et bien faites lorsqu'elle est traitée... mais tout le monde n'en profite bien !

13. $\boxed{2 \text{ pt}}$ A l'aide de la question 3., en déduire que $\cos(\theta)\cos(3\theta) = -\frac{1}{4}$.

   Non traitée.

14. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déduire des questions précédentes une équation du second degré vérifiée par $\cos(\theta)$.

   Non traitée.

15. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Retrouver la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

   Non traitée.

Partie 3 : Une inéquation trigonométrique $\boxed{6 \text{ pt}}$

On souhaite résoudre l'inéquation trigonométrique suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) \qquad \cos^3(x)\sin(3x) + \sin^3(x)\cos(3x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}(1 - \cos(4x)).$$

16. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $A = \cos^3(x)\sin(3x) + \sin^3(x)\cos(3x)$.

    (a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que $A = 3\sin(x)\cos(x)\left[\cos^2(x) - \sin^2(x)\right]$.

    Bien globalement. Citez bien les questions 2 et 3 quand vous les utilisez.

    (b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que $A = \lambda \sin(u)$, où u est un réel que l'on précisera en fonction de x et λ un réel que l'on précisera également.

    Moins bien réussie, pas très difficile. Quelques bonnes réponses.

17. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Résoudre (E).

    Une ou deux tentatives non abouties.

Problème II - Complexes $\boxed{45\text{ pt}}$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z^2+\alpha}{2z} \end{array}$$

Partie 1 : Quelques calculs $\boxed{18\text{ pt}}$

1. $\boxed{2\text{ pt}}$ Calculer la forme polaire de $2i$ et de $\sqrt{3}-i$.

   Bien globalement mais je constate avec effroi que cela pose des difficultés à plusieurs d'entre vous...

2. On suppose que $\alpha = 4i$.

   (a) $\boxed{3\text{ pt}}$ Calculer $f(2i)$ et préciser sa forme polaire.

   Idem.

   (b) $\boxed{3\text{ pt}}$ Calculer $f\left(\sqrt{3}-i\right)$ et préciser sa forme polaire.

   Un peu plus de calcul mais rien de bien méchant. Pour la forme polaire, il fallait penser à factoriser. Les deux questions étaient généreusement dotées.

3. On suppose que $\alpha = 1$.

   (a) $\boxed{2\text{ pt}}$ Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer que $f(z) \in \mathbb{R}$.

   De bons débuts mais pas souvent aboutie. Il suffisait de montrer que $f(z) \in \mathbb{R}$ était équivalente à une assertion toujours vraie. Un petit malin s'est servi de la question suivante.

   (b) $\boxed{2\text{ pt}}$ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $f\left(e^{i\theta}\right)$.

   Bien ! J'ai vu plusieurs fois $\frac{a}{2\,e^{i\theta}} = a2\,e^{-i\theta}$ ouille.

   (c) $\boxed{4\text{ pt}}$ En déduire que $f(\mathbb{U}) = [-1;1]$. *On procédera pour double inclusion.*

   Plus dure. Aucune bonne réponse.

4. $\boxed{2\text{ pt}}$ On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer $f^{\leftarrow}(i\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}^* \mid f(z) \in i\mathbb{R}\}$.

   Classique et pourtant non traitée.

Partie 2 : Etude d'une suite complexe $\boxed{27\text{ pt}}$

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. On pose alors $\alpha = \beta^2$ et on note $\mathcal{P}_+ = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right) > 0 \right\}$.

5. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$.

   (a) $\boxed{2\text{ pt}}$ Justifier que $z \neq 0$ et calculer la forme algébrique de $\frac{1}{z}$.

   Peu de justification claire de pourquoi $z \neq 0$. Ok pour la forme algébrique de $\frac{1}{z}$ même si je n'ai pas eu que des bonnes réponses.

   (b) $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que $\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$.

   Peu de réponses claires. Plusieurs ont cru que $z \in \mathcal{P}_+$ ce qui n'était pas du tout une hypothèse de l'énoncé.

6. $\boxed{2\text{ pt}}$ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{z}{\beta} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\beta}\right)\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{\beta z}\right) > 0$.

   Non traitée ou réussie.

7. $\boxed{3\text{ pt}}$ Démontrer $f(\mathcal{P}_+) \subset \mathcal{P}_+$.

   Non traitée.

On fixe $z_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$z_{n+1} = f(z_n) \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{z_n - \beta}{z_n + \beta}.$$

8. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n existe et $z_n \in \mathcal{P}_+$.
   Aucune bonne réponse.

9. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_n existe.
   Aucune bonne réponse.

10. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = (w_n)^2$.
    Une poignée de bonnes réponses.

11. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de w_n en fonction de w_0 et de n.
    Non réussie, ce n'était pas une suite géométrique.

12. (a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Démontrer que $|\beta - 1|^2 < |\beta + 1|^2$.
    Non réussie.
    (b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que $|w_0| < 1$.
    Non traitée.
    (c) $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|w_n| < 1$.
    Non traitée.

13. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \beta \frac{1+w_n}{1-w_n}$.
    Une ou deux tentatives.

14. $\boxed{2 \text{ pt}}$ On rappelle que pour $q \in \mathbb{C}$, si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. Conclure en donnant la limite de z_n.
    Non traitée.

Problème III - Calcul algébrique $\boxed{60 \text{ pt}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

On se propose de calculer S_n par deux méthodes.

Partie 1 : Méthode 1 $\boxed{14 \text{ pt}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose également

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}.$$

1. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Préciser S_0, S_1, S_2 et S_3.
   Elémentaire, à refaire si vous n'avez pas eu les points. Globalement bien réussie mais pas toujours.

2. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $f_n(x)$.
   Bien.

3. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une primitive de f_n sur $\mathbb{R}$.

   Bien, deux réponses étaient possibles $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}$ ou $x \mapsto \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$ au choix. Certains ont même ajouté une constante, ce qui est un bon réflexe.

4. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire qu'il existe $K_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} + K_n.$$

   Ok même si la rédaction sera à reprendre avec le chapitre calcul de primitives.

5. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer la valeur de K_n.

   Plusieurs ont pris $n = 0$, cela donnait juste K_0 et non la formule pour K_n. Un résultat correct mais parachutée donc aucune bonne réponse ici.

6. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire le calcul de S_n.

   Quelques bonnes réponses.

7. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Vérifier la cohérence de votre résultat avec la question 1.

   Certains ne retrouvent pas le résultat de la question 1 et ne s'en aperçoivent même pas... Soyez le plus honnête possible ce sera valorisé dans la correction de votre copie.

Partie 2 : Méthode 2 $\boxed{6 \text{ pt}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

8. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.

   Quelques bonnes réponses mais assez peu.

9. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Retrouver alors la valeur S_n.

   Non réussie. Un ou deux forçages.

10. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire le calcul de $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1}\binom{n}{k}$.

    Pas très dure mais non traitée.

Partie 3 : La série harmonique $\boxed{12 \text{ pt}}$

On s'intéresse maintenant à la somme suivante : on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

11. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer H_1, H_2, H_3 et H_4.

    Facile et bien réussie.

12. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer H_{n+1} en fonction de H_n.

    Facile aussi. Rédigez et justifiez donc a minima. Plus une question est facile, plus il faut détailler.

13. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

    Assez bien globalement avec des rédactions assez disparate, du bon et du moins bon.

14. 2 pt Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Ecrire $H_{2p} - H_p$ sous la forme d'une unique somme.
Facile mais peu de bonnes réponses.

15. 2 pt A l'aide d'un encadrement de $\frac{1}{k}$, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} \leqslant H_{2p} - H_p \leqslant 1$.
Plus dure mais qui sera important au S2. A reprendre.

16. 2 pt Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{2^n} \geqslant \frac{n}{2} + 1$.
Aucune réponse complète.

Partie 4 : Avec une décomposition en éléments simples 8 pt

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)}$.

17. 2 pt Déterminer a et b deux réels tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}$.
Bien, soyez là aussi attentif à la rédaction, il nous faut juste UN couple solution, on ne démontre pas d'unicité ici. Il faut donc bien dire « IL SUFFIT » et non $\Leftrightarrow$

18. 2 pt En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.
Pratiquement aucune bonne réponse alors qu'il s'agissait juste d'un télescopage. Très peu l'ont vu et encore moins l'ont rédigé efficacement.

19. 2 pt Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{H_k}{k+1} - \frac{H_{k+1}}{k+2} \right) + U_n$.
Non traitée. Pas si dure.

20. 2 pt En déduire une expression de V_n en fonction de H_{n+1}.
Non traitée.

Partie 5 : Dans deux sommes doubles 8 pt

Soit $n \in \mathbb{N}$.

21. (a) 2 pt Ecrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$ comme une somme double.
Quelques tentatives mais souvent maladroites. A revoir.

(b) 2 pt En intervertissant l'ordre de sommation, en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1) H_n - n$.
Pas si dure, non traitée.

(c) 2 pt On suppose $n \geqslant 2$ et on fixe $i \in [\![1; n-1]\!]$. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i} = H_m$ où m est un entier que l'on précisera.
Non traitée.

(d) 2 pt En déduire que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i} = n(H_n - 1)$.
Non traitée.

Partie 6 : Avec des coefficients binomiaux 12 pt

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in [\![0;n]\!]$, $B_{n,m} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k$.

22. 3 pt Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathscr{P}(n) : \quad « \forall m \in [\![0;n]\!], \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} »$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Aucune bonne réponse.

23. 2 pt Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [\![0;n]\!]$. A l'aide de la question 7. montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \binom{i}{m+1} = \frac{1}{m+1} \binom{n}{m+1}.$$

Non traitée.

24. 2 pt Ecrire $B_{n,m}$ sous la forme d'une somme double.

Non traitée.

25. 2 pt En déduire des questions précédentes que $B_{n,m} = \binom{n+1}{m+1} H_n - \frac{1}{m+1}\binom{n}{m+1}$.

Non traitée.

26. 3 pt Conclure que $B_{n,m} = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right)$.

Non traitée.