

Epreuve de mathématiques 3

2025-2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroté les copies



Problème 1 - Fonctions usuelles

Partie 1 : Simplification par la dérivée

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}\right) \quad \text{et} \quad \varphi : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}.$$

1. Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de φ .
2. Préciser la parité de φ .
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)}$.
5. En déduire le tableau de variation complet de φ .
6. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2 \operatorname{ch}(x)}.$$

7. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(x))$.

Partie 2 : Simplification par la trigonométrie

On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}\right). \end{array}$$

8. Déterminer la parité de g .
9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x < \sqrt{1 + x^2} < 1 + \sqrt{1 + x^2}$.
10. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$0 \leq g(x) < \frac{\pi}{4}.$$
11. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\tan(g(x))$ et $\tan(2g(x))$ existent.
12. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\tan(2g(x)) = x$.
13. En déduire une expression plus simple de g sur $\mathbb{R}$.
14. A l'aide de la question précédente, retrouver le résultat de la question 7.

Partie 3 : Une équation

On considère l'équation

$$(E) : \quad g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

15. Déterminer $\mathcal{D}_E$ le domaine où (E) est bien définie.
16. Pour $x \in \mathcal{D}_E$, simplifier $\sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.
17. Pour $x \in \mathcal{D}_E$, simplifier $\sin(\arctan(x))$.
18. A l'aide de la question 13. résoudre (E) .

Problème 2 - Equations complexes

Partie 1 : Une équation de degré 3

On considère l'équation suivante $(E) : z^3 + (1 + i)z^2 + (2 - 2i)z + 8i = 0$.

1. Déterminer les racines carrées de $\omega = 8 + 6i$.
2. Par un raisonnement d'analyse/synthèse, pour $y \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\begin{cases} -y^3 - y^2 + 2y + 8 = 0 \\ -y^2 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2.$$

3. En déduire l'ensemble des complexes $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, imaginaires purs, solutions de (E) .
4. Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X^3 + (1 + i)X^2 + (2 - 2i)X + 8i = (X - 2i)(aX^2 + bX + c)$.
5. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E) et placer les solutions dans le plan complexe.

Partie 2 : Un soupçon de géométrie

On pose A le point d'affixe $1 - i$ et B celui d'affixe $-2 - 2i$.

6. Montrer que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et en déduire la nature du triangle AOB .
7. Calculer OA , OB et BA et retrouver le résultat de la question précédente.
8. On pose A' l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que O , A et A' sont alignés. Est-ce cohérent avec les questions précédentes?

Partie 3 : Des racines n -ièmes (quand même)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(F) : (1 + i\sqrt{3})z^n + (-1 + i\sqrt{3})z^{2n} - 2z^{3n} - (1 + i\sqrt{3})z^{4n} + (1 - i\sqrt{3})z^{5n} = -2.$$

9. Rappeler les solutions de $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$.
10. Ecrire chacune des solutions sous forme algébrique.
11. En déduire sous forme polaire les solutions de

$$(F_0) : (1 + i\sqrt{3})z + (-1 + i\sqrt{3})z^2 - 2z^3 - (1 + i\sqrt{3})z^4 + (1 - i\sqrt{3})z^5 = -2.$$

12. En déduire les solutions de (F) .

Problème 3 - Calcul d'intégrales

Partie 1 : Des primitives

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x} \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que g_n possède des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Ecrire à l'aide d'une intégrale, G_n l'unique primitive de g_n vérifiant $G_n(1) = 0$.
3. Déterminer les primitives de g_0 .
4. Préciser G_0 .
5. Déterminer les primitives de g_1 .
6. On suppose que $n = -1$. Justifier que f_{-1} admet des primitives sur $] -1; 0[$.
7. Déterminer les primitives de f_{-1} sur $] -1; 0[$.

Partie 2 : Des intégrales

On suppose dans toute la suite que $n \in \mathbb{N}$ et on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

8. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe.
9. Calculer I_0 .
10. Montrer que $I_1 = 1 - \ln(2)$.
11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
12. En déduire I_2 puis I_3 .
13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 2g_{2n+1}(t) dt$.
14. Retrouver à l'aide de la question précédente la valeur de I_0 .
15. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$ en fonction de I_{n+1} .
16. En déduire la valeur de $K = \int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx$.
17. A l'aide du changement de variable $x = \sin(\theta)$, calculer $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\theta)}{1 + \sin(\theta)} d\theta$.

Partie 3 : Etude de la suite d'intégrales

18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \int_0^1 x^n dx$.
20. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx$.

21. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} J_{n+1}$.
22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.
23. En déduire que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Partie 4 : Une expression de I_n sous forme de somme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

24. Appliquer à I_n le changement de variable $x = e^t - 1$.
25. En déduire que $I_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \int_0^{\ln(2)} e^{tk} dt$.
26. En déduire une expression de I_n sous la forme d'une somme ne faisant pas intervenir d'intégrale.
27. Retrouver alors la valeur de I_3 .