Commentaires du DS3
Fonctions usuelles, équations complexes, calcul d'intégrales

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{80}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1	P2.1	P2.2	02.3	P2	P3.1	P3.2	P3.3	P3.4	P3	Total	Note finale
Moyenne	-2,7	7,5	3,6	1,5	12,6	4,3	1,9	0,3	6,5	6,1	5,4	0,7	0,4	12,6	29	8,63
Sur		15	15	10	40	10	9	11	30	14	21	12	8	55	125	20

TOTAL : 125 pt

Problème I - Fonctions usuelles 40 pt

Partie 1 : Simplification par la dérivée 15 pt

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad \varphi : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}.$$

1. **2 pt** Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de φ.

   Bien globalement. Inutile de revenir aux exponentielles, on utilise directement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geqslant 1$.

2. **2 pt** Préciser la parité de φ.

   Bien globalement mais très peu pensent à préciser que le domaine de définition $\mathcal{D}$ est centré en 0.

3. **2 pt** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

   Très peu de bonnes réponses (une ou deux seulement). Quelques parachutages et la plupart du temps erronés. A bien revoir.

4. **2 pt** Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{ch}(x)}$.

   Bien globalement. Quelques erreurs encore de dérivation mais relativement peu. Des simplifications pas toujours correctes et plusieurs forçages qui pénalisent la copie mais une grande majorité de bonnes réponses.

5. **2 pt** En déduire le tableau de variation complet de φ.

   Facile, n'allez pas trop trop vite, rédigez a minima. Peu de limites correctes mais quelques-uns ont bien vu que par imparité $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ ce qui rapportait un point même si l'on n'avait pas calculé $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

6. **3 pt** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\operatorname{ch}(x)}.$$

   Un peu plus de calcul. Plusieurs vont bien jusqu'au bout et quelques-uns ont pratiqué du forçage malhonnête, à surtout éviter le jour du concours.

7. **2 pt** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x))$.

   Bizarrement peu de réponses. Une ou deux bonnes maximum. Sinon vous oubliez presque tous (pour ceux qui la tente) la constante d'intégration. Plutôt que d'essayer de faire apparaître avec efforts dans la question précédente la dérivée de $g : x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x))$, il suffisait de calculer g' est d'observer après que $g' = f'$ puis de primitiver.

Partie 2 : Simplification par la trigonométrie **15 pt**

On considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right). \end{array}$$

8. **2 pt** Déterminer la parité de g.

   Bien sauf le domaine centré en 0.

9. **2 pt** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x < \sqrt{1+x^2} < 1+\sqrt{1+x^2}$.

   Beaucoup d'arnaques ou de confusions. L'inégalité de droite est toute simple. Celle de gauche demandait un tout petit peu plus de calcul. Attention à bien rédiger et manipuler les inégalités.

10. **2 pt** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leqslant g(x) < \frac{\pi}{4}.$$

   Plusieurs bonnes réponses et d'autres pas très claires.

11. **2 pt** Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\tan(g(x))$ et $\tan(2g(x))$ existent.

   Le domaine de définition de tan n'est que trop peu connu!! Beaucoup d'inexactitudes qui rendent la réponse complètement fausse. Certains essayent de simplifier d'abord l'expression avant de montrer son existence, cela ne fonctionne pas.

12. **3 pt** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\tan(2g(x)) = x$.

   Assez peu de bonnes réponses. Question qui n'est pas toute simple mais sans grande difficulté non plus.

13. **2 pt** En déduire une expression plus simple de g sur $\mathbb{R}$.

   Vous avez presque tous sous-estimé la question. La fonction tangente n'est pas injective donc pour simplifier $\tan(a) = \tan(b)$ il est absolument nécessaire de vérifier que a et b sont dans le même intervalle de longueur π. A méditer.

14. **2 pt** A l'aide de la question précédente, retrouver le résultat de la question 7.

   Deux ou trois bonnes réponses. Non traitée sinon.

Partie 3 : Une équation **10 pt**

On considère l'équation

$$(E) : \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

15. **2 pt** Déterminer $\mathcal{D}_E$ le domaine où (E) est bien définie.

   Bien pour une moitié de classe, l'autre moitié ignore le domaine de définition de arcsin ou ne comprenne pas ce que signifie une composée.

16. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Pour $x \in \mathcal{D}_E$, simplifier $\sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

    Des débuts de réponses mais peu de réponses complètes.

17. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Pour $x \in \mathcal{D}_E$, simplifier $\sin(\arctan(x))$.

    Pratiquement pas de bonnes réponses.

18. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ A l'aide de la question 13. résoudre (E).

    Quelques tentatives bien démarrées mais pas toujours abouties.

Problème II - Equations complexes $\boxed{\textbf{30 pt}}$

Partie 1 : Une équation de degré 3 $\boxed{\textbf{10 pt}}$

On considère l'équation suivante (E) : $z^3 + (1+i)\,z^2 + (2-2i)\,z + 8i = 0$.

1. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer les racines carrés de $\omega = 8 + 6i$.

   Classique, plutôt bien réussie. Attention à ne pas être trop trop rapide au début.

2. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Par un raisonnement d'analyse/synthèse, pour $y \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\begin{cases} -y^3 - y^2 + 2y + 8 = 0 \\ -y^2 + 2y = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 2.$$

   De bonnes réponses et parfois le raisonnement n'est pas très clair, en particulier l'utilisation de la synthèse.

3. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire l'ensemble des complexes $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, imaginaires purs, solutions de (E).

   Très peu de bonnes réponses. Beaucoup parachutent $z = 2i$ sans aucune démonstration (ce qui ne rapporte aucun point). Justifier bien l'utilisation de l'unicité de la forme algébrique en précisant que $y \in \mathbb{R}$.

4. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $X^3 + (1+i)\,X^2 + (2-2i)\,X + 8i = (X - 2i)\left(aX^2 + bX + c\right)$.

   Une ou deux personnes ont été gênées par la faute de l'énoncé qui parlait de $\mathbb{R}$ et non de $\mathbb{C}$. Lorsque cela a été le cas, et clairement indiqué par le candidat, les points ont été donnés. Sinon cela ne vous a pas perturbés et beaucoup de réponses sont correctes (par des méthodes parfois différentes).

5. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E) et placer les solutions dans le plan complexe.

   Le raisonnement est rarement clair et la question pas très souvent abordée, c'est dommage puisqu'il s'agit d'articuler tous ce que l'on a fait avant pour comprendre à quoi cela peut bien servir. Quelques bonnes réponses quand même.

Partie 2 : Un soupçon de géométrie $\boxed{\textbf{9 pt}}$

On pose A le point d'affixe $1 - i$ et B celui d'affixe $-2 - 2i$.

6. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Montrer que $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et en déduire la nature du triangle AOB.

   Tout le monde a confondu $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$ avec $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, ce qui aurait dû vous choquer sur un dessin. Conséquence j'ai vu de trop nombreuses fois $\arg(-2i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ quand ce n'est pas carrément une égalité sans modulo...

7. $\boxed{3\text{ pt}}$ Calculer OA, OB et BA et retrouver le résultat de la question précédente.

   Quelques bonnes réponses. Plusieurs cependant me retourne un complexe du genre $1-i$ pour une longueur ! ! Mettez du sens à ce que vous écrivez.

8. $\boxed{3\text{ pt}}$ On pose A' l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer que O, A et A' sont alignés. Est-ce cohérent avec les questions précédentes ?

   Des raisonnements pas toujours clairs mais plusieurs bonnes réponses également.

Partie 3 : Des racines n-ièmes (quand même) $\boxed{11\text{ pt}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(F)\ :\qquad \left(1+i\sqrt{3}\right)z^n+\left(-1+i\sqrt{3}\right)z^{2n}-2z^{3n}-\left(1+i\sqrt{3}\right)z^{4n}+\left(1-i\sqrt{3}\right)z^{5n}=-2.$$

9. $\boxed{2\text{ pt}}$ Rappeler les solutions de $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=0$.

   Un très large massacre, aucune bonne réponse, ce qui impactait toute la partie.

10. $\boxed{2\text{ pt}}$ Ecrire chacune des solutions sous forme algébrique.

    Peu de réponses vu que la question précédente n'a jamais été correctement résolue.

11. $\boxed{4\text{ pt}}$ En déduire sous forme polaire les solutions de

$$(F_0)\ :\ \left(1+i\sqrt{3}\right)z+\left(-1+i\sqrt{3}\right)z^2-2z^3-\left(1+i\sqrt{3}\right)z^4+\left(1-i\sqrt{3}\right)z^5=-2.$$

    Quelques bons débuts puis des erreurs quand il s'agit d'utiliser les questions précédentes.

12. $\boxed{3\text{ pt}}$ En déduire les solutions de (F).

    Non réussie.

Problème III - Calcul d'intégrales $\boxed{55\text{ pt}}$

Partie 1 : Des primitives $\boxed{14\text{ pt}}$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x} \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}.$$

1. $\boxed{2\text{ pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que g_n possède des primitives sur $\mathbb{R}$.

   Globalement su mais souvent des rédactions lacunaires ou brouillonne. Il était attendu deux arguments, le premier que $1+x^2$ ne s'annule pas, le second que g_n est continue sur $\mathbb{R}$. Attention à donner la bonne hypothèse. Ceux qui ont parlé de dérivable ou $\mathscr{C}^1$ ont perdu un point. Attention à ne plus confondre à ce stade de l'année g_n avec $g_n(x)$.

2. $\boxed{2\text{ pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Ecrire à l'aide d'une intégrale, G_n l'unique primitive de g_n vérifiant $G_n(1)=0$.

   Une unique bonne réponse. Mettez du sens sur les théorèmes que vous apprenez.

3. $\boxed{2\text{ pt}}$ Déterminer les primitives de g_0.

   Bien pour le calcul, pas bien pour la rédaction. Plusieurs me parlent de $\arctan(x)+K$. Attention, il faut parler de $x \mapsto \arctan(x)+K$ et dans un ensemble solution c'est beaucoup plus propre : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \arctan(x)+K \end{array} \;\middle|\; K \in \mathbb{R} \right\}$.

4. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Préciser G_0.
Quelques-uns s'en sortent même sans la question 2 en calculant bien la constante K.

5. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer les primitives de g_1.
Bien globalement. Attention à bien mettre d'abord des valeurs absolue dans le ln avant de les enlever.

6. $\boxed{2 \text{ pt}}$ On suppose que $n = -1$. Justifier que f_{-1} admet des primitives sur $]-1;0[$.
Brouillon la plupart du temps. Il faut bien faire apparaitre que le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1;0[$ puis parler de continuité.

7. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer les primitives de f_{-1} sur $]-1;0[$.
Pas très souvent traitée alors qu'il s'agit simplement d'une décomposition en éléments simples.

Partie 2 : Des intégrales $\boxed{21 \text{ pt}}$

On suppose dans toute la suite que $n \in \mathbb{N}$ et on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

8. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe.
Bien pour plusieurs. D'autres écrivent I_n est définie en x si et seulement si... A n fixé, I_n est un nombre qui ne dépend en aucun cas d'une variable x. Que f_n soit continue sur $\mathbb{R}_+$ ne suffit pas, il faut bien faire apparaitre que f_n est donc continue sur le segment $[0;1]$ et donc I_n existe.

9. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer I_0.
Bien.

10. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que $I_1 = 1 - \ln(2)$.
Plus dure, il fallait voir la petite astuce $\frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$. Certains l'ont réussi en passant par une intégration par parties, c'est plus dur mais cela pouvait marcher.

11. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
Quelques-uns sont partis sur une récurrence et ont fait la récurrence sans s'appuyer sur l'hypothèse $\mathscr{P}(n)$... ce n'était donc pas une récurrence mais un calcul direct qui permettait de répondre à la question.

12. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire I_2 puis I_3.
Bien globalement.

13. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 2g_{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t$.
Pratiquement pas abordée.

14. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Retrouver à l'aide de la question précédente la valeur de I_0.
Assez bien lorsqu'elle est traitée y compris en admettant la question précédente.

15. $\boxed{2 \text{ pt}}$ A l'aide d'une intégration par parties, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de I_{n+1}.
Il me manque encore beaucoup de rédaction propre de l'intégration par parties... L'hypothèse $\mathscr{C}^1$ AVANT de dériver est parfois manquante. On ne peut pas définir de u' ou de v'. On peut seulement définir du u et du v et ensuite dériver.

16. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire la valeur de $K = \displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.
   Ok lorsque les questions précédentes ont été réussies.

17. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ A l'aide du changement de variable $x = \sin(\theta)$, calculer $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\,\theta)}{1+\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.
   Pas si dure. Quelques bonnes réponses. Là aussi l'hypothèse $\mathscr{C}^1$ manque bien trop souvent.

Partie 3 : Etude de la suite d'intégrales $\boxed{\textbf{12 pt}}$

18. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
   Une petite poignée de bonnes réponses mais peu traitée.

19. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.
   Idem.

20. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
   Pouvait se traiter en admettant les précédentes. Très peu abordée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

21. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} J_{n+1}$.
   Très peu abordée.

22. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   Très peu abordée.

23. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.
   Non traitée.

Partie 4 : Une expression de I_n sous forme de somme $\boxed{\textbf{8 pt}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

24. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Appliquer à I_n le changement de variable $x = \mathrm{e}^t - 1$.
   Quelques bonnes réponses et toujours des problèmes de justifications pour d'autres.

25. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{tk}\,\mathrm{d}t$.
   Plusieurs copies ont bien vu le binôme de Newton.

26. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire une expression de I_n sous la forme d'une somme ne faisant pas intervenir d'intégrale.
   Les quelques personnes qui l'ont abordée n'ont pas vu le cas particulier de $k = 0$.

27. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Retrouver alors la valeur de I_3.
   Non traitée.