Corrigé du Devoir Surveillé 3
Fonctions usuelles, équations complexes, calcul d'intégrales

Problème I - Fonctions usuelles

Partie 1 : Simplification par la dérivée

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad \varphi : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}.$$

1. Les fonctions sh et ch sont définies sur $\mathbb{R}$. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1+\operatorname{ch}(x) \geqslant 1+1 > 0.$$
Donc $x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas :
$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}.}$$

2. On note que $\mathcal{D}$ est centré en 0. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}\varphi(-x) &= \frac{\operatorname{sh}(-x)}{1+\operatorname{ch}(-x)}\\ &= \frac{-\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)} && \text{car sh est impaire et ch est paire}\\ &= -\varphi(x).\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est impaire.}}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :
$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}}.$$
En factorisant par le terme prépondérant qui est e^x, on obtient
$$\varphi(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+2e^{-x}+e^{-2x}}.$$
Puisque $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $e^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on conclut que
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1.}$$

4. La fonction φ est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) &= \frac{\operatorname{sh}'(x)\,(1+\operatorname{ch}(x)) - \operatorname{sh}(x)\,(1+\operatorname{ch}(x))'}{(1+\operatorname{ch}(x))^2}\\ &= \frac{\operatorname{ch}(x)\,(1+\operatorname{ch}(x)) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(x)}{(1+\operatorname{ch}(x))^2}\\ &= \frac{\operatorname{ch}(x)+\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)}{(1+\operatorname{ch}(x))^2}.\end{aligned}$$

Or on a $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$. D'où,

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{ch}(x) + 1}{(1 + \operatorname{ch}(x))^2} = \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)}.}$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \operatorname{ch}(x) \geqslant 2 > 0$ donc par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)} > 0.$$

On en déduit que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus on a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$. Donc par imparité de φ, on en déduit également que $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -1$. Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ	-1	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	1

6. On observe que $f = \arctan \circ \varphi$. Or les fonctions φ et arctan sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \varphi'(x) \arctan'(\varphi(x)) \\
&= \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)} \frac{1}{1 + \varphi^2(x)} \qquad \text{par la question 4.} \\
&= \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)} \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{(1+\operatorname{ch}(x))^2}} \\
&= \frac{1}{1 + \operatorname{ch}(x)} \frac{(1 + \operatorname{ch}(x))^2}{(1 + \operatorname{ch}(x))^2 + \operatorname{sh}^2(x)} \\
&= \frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{1 + 2\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x)} \\
&= \frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{1 + 2\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{ch}^2(x) - 1} \\
&= \frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{2\operatorname{ch}(x) + 2\operatorname{ch}^2(x)} \\
&= \frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{2\operatorname{ch}(x)(1 + \operatorname{ch}(x))} \\
&= \frac{1}{2\operatorname{ch}(x)}.
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2\operatorname{ch}(x)}.}$$

7. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x))$. La fonction h est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h'(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}'(x)\arctan'(\operatorname{sh}(x)) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{2}\frac{1}{1+\operatorname{sh}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}(x)}{2}\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{2\operatorname{ch}(x)}.$$
Ainsi, on observe que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = h'(x).$$
Par suite,
$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = h(x) + C.$$
En particulier pour $x = 0$,
$$\begin{aligned} f(0) = h(0) + C \qquad &\Leftrightarrow \qquad \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(0)}{1+\operatorname{ch}(0)}\right) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(0)) + C \\ &\Leftrightarrow \qquad 0 = 0 + C \\ &\Leftrightarrow \qquad C = 0. \end{aligned}$$
Conclusion, on obtient bien que
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = h(x) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x)).}$$

Partie 2 : Simplification par la trigonométrie

On considère la fonction
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right). \end{array}$$

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ et $1 + \sqrt{1+x^2} \geqslant 1 > 0$. De plus la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Donc par composition et quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas, g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   - L'ensemble $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par imparité de la fonction arctan on a
$$\begin{aligned} g(-x) &= \arctan\left(\frac{-x}{1+\sqrt{1+(-x)^2}}\right) \\ &= \arctan\left(-\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= -\arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

   Conclusion,
$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est impaire.}}$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $1 + x^2 > x^2$. Donc par la stricte croissance de la fonction racine carrée,
$$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = x \qquad\qquad \text{car } x \geqslant 0.$$
D'autre part, on a directement $\sqrt{1+x^2} < 1 + \sqrt{1+x^2}$. Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x < \sqrt{1+x^2} < 1 + \sqrt{1+x^2}.}$$

10. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque $0 \leqslant x < 1 + \sqrt{1+x^2}$ et que $1 + \sqrt{1+x^2} > 0$, on en déduit que
$$0 \leqslant \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} < 1.$$
Par la stricte croissance de la fonction arctan sur $\mathbb{R}$, on en déduit que
$$0 = \arctan(0) \leqslant \arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leqslant g(x) < \frac{\pi}{4}.}$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par la question précédente, $g(x) \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[\subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Donc $\tan(g(x))$ existe. De même,
$$2g(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \tan(g(x)) \text{ et } \tan(2g(x)) \text{ existent.}}$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Puisque $\tan(g(x))$ et $\tan(2g(x))$ existent, on a
$$\tan(2g(x)) = \frac{2\tan(g(x))}{1-\tan^2(g(x))}.$$
Or, $g(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)$ donc $\tan(g(x)) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$ (c'est la composée inverse qui pose problème). D'où
$$\begin{aligned}
\tan(2g(x)) &= \frac{2\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}}{1-\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right)^2} \\
&= \frac{2x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^2 - x^2} \\
&= \frac{2x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+2\sqrt{1+x^2}+1+x^2-x^2} \\
&= \frac{2x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{2+2\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+\sqrt{1+x^2}} \\
&= x.
\end{aligned}$$
Conclusion, on obtient bien
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \tan(2g(x)) = x.}$$

13. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par la question précédente, $\tan(2g(x)) = x$. Donc en composant par la fonction arctan, on a
$$\arctan(\tan(2g(x))) = \arctan(x).$$
Or $2g(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent,
$$\arctan(\tan(2g(x))) = 2g(x).$$

Ainsi,

$$2g(x) = \arctan(x) \qquad \Rightarrow \qquad g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x).$$

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a $-x \in \mathbb{R}_+$ et donc par ce que l'on vient de démontrer

$$g(-x) = \frac{1}{2}\arctan(-x).$$

Or les fonctions g et arctan sont impaires. Donc

$$-g(x) = -\frac{1}{2}\arctan(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x).$$

La relation reste donc vraie sur $\mathbb{R}_-$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x).}$$

14. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u = \operatorname{sh}(x)$. Par la question précédente, on a

$$g(u) = \frac{1}{2}\arctan(u)$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
& g(\operatorname{sh}(x)) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x)) \\
\Leftrightarrow \quad & \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\sqrt{1+\operatorname{sh}(x)^2}}\right) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x)) \\
\Leftrightarrow \quad & \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\sqrt{\operatorname{ch}^2(x)}}\right) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x)) && \text{car } \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}\right) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x)) && \text{car } \operatorname{ch}(x) > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & f(x) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x)) \qquad \textit{incroyable !}
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 7. :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}(x)}\right) = \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}(x)).}$$

Partie 3 : Une équation

On considère l'équation

$$(E) \; : \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

15. On sait que g est définie sur $\mathbb{R}$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{D}_E \qquad & \Leftrightarrow \qquad \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \text{ existe} \\
& \Leftrightarrow \qquad -1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1 \\
& \Leftrightarrow \qquad -2 \leqslant x \leqslant 2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{D}_E = [-2; 2].}$$

16. Soit $x \in \mathcal{D}_E$. On sait que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$. Donc

$$\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2 \times \frac{x}{2}\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u)$. De plus, pour $u = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$, on a $u \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\cos(u) \geqslant 0$. Dans ce cas,

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2(u)} = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{D}_E, \qquad \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.}$$

17. Soit $x \in \mathcal{D}_E$. Posons $u = \arctan(x)$. On a $u \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On a

$$\sin^2(u) = 1 - \cos^2(u).$$

Or puisque $u \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(u) \neq 0$ et on a $\frac{1}{\cos^2(u)} = \tan'(u) = 1 + \tan^2(u)$. Donc

$$\sin^2(u) = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2(u)} = \frac{\tan^2(u)}{1 + \tan^2(u)}.$$

Si $x \geqslant 0$, alors $u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\sin(u) \geqslant 0$ et $\tan(u) \geqslant 0$. Dans ce cas,

$$\sin(u) = \sqrt{\frac{\tan^2(u)}{1 + \tan^2(u)}} = \frac{\tan(u)}{\sqrt{1 + \tan^2(u)}}.$$

Au contraire si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Alors, $\sin(u) \leqslant 0$ et $\tan(u) \leqslant 0$. Dans ce cas,

$$\sin(u) = -\sqrt{\frac{\tan^2(u)}{1 + \tan^2(u)}} = -\frac{-\tan(u)}{\sqrt{1 + \tan^2(u)}} = \frac{\tan(u)}{\sqrt{1 + \tan^2(u)}}.$$

Donc dans tous les cas,

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{\tan(\arctan(x))}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan(x))}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in D_E, \qquad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.}$$

18. *Analyse.* Soit $x \in \mathcal{D}_E$. Par la question 13. on a $g(x) = \frac{1}{2}\arctan(x)$. Donc

$$(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

On obtient donc les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Rightarrow \quad \arctan(x) = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \\
&\Rightarrow \quad \sin\left(\arctan(x)\right) = \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \qquad \text{par les deux questions précédentes} \\
&\Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \\
&\Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ \frac{1}{1+x^2} = 1-\frac{x^2}{4} \\
&\Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ 1 = \left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1+x^2\right) \\
&\Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ 1 = 1 + x^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} \\
&\Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ 0 = \frac{3x^2}{4} - \frac{x^4}{4} \\
&\Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ x = 0 \ \text{ OU } \ 0 = 3 - x^2 \\
&\Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ OU } \ x = \sqrt{3} \ \text{ OU } \ x = -\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc trois candidats potentiellement solutions.

Synthèse. Si $x = 0$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\arctan(0) = \arcsin\left(\frac{0}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \arcsin(0) \text{ OK.}$$

Si $x = \sqrt{3}$, on a

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ impossible.}$$

De même si $x = -\sqrt{3}$, on a

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \text{ impossible.}$$

Conclusion, l'unique solution de (E) est donnée par

$$\boxed{x = 0.}$$

Problème II - Equations complexes

Partie 1 : Une équation de degré 3

On considère l'équation suivante

$$(E) \ : \qquad z^3 + (1+i)\,z^2 + (2-2i)\,z + 8i = 0.$$

1. Déterminons les racines carrés de $\omega = 8+6i$. Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $z=x+iy$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z^2=\omega \quad &\Leftrightarrow \quad (x+iy)^2 = 8+6i \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ 2xy=6 \\ |\delta|^2 = |8+6i| = \sqrt{64+36}=10 \end{cases} \qquad \text{par unicité de la forme algébrique} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ xy=3 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2=9 & L_1 \leftarrow \frac{L_1+L_2}{2} \\ y^2=1 & L_2 \leftarrow \frac{L_2-L_1}{2} \\ xy=3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases} \qquad \text{car } xy\geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z=3+i \ \text{ OU } \ z=-3-i.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des racines carrées de ω sont

$$\boxed{\mathscr{S} = \{3+i;-3-i\}.}$$

2. Par un raisonnement d'analyse/synthèse, pour $y\in\mathbb{R}$, montrons que

$$\begin{cases} -y^3-y^2+2y+8=0 \\ -y^2+2y=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y=2.$$

Soit $y\in\mathbb{R}$. *Analyse.* Supposons que $\begin{cases} -y^3-y^2+2y+8=0 \\ -y^2+2y=0 \end{cases}$. Par la deuxième ligne, on en déduit que

$$-y^2+2y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y(2-y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=0 \ \text{ OU } \ y=2.$$

Synthèse. Si $y=0$, alors

$$\begin{cases} -y^3-y^2+2y+8=8\neq 0 \text{pas OK !} \\ -y^2+2y=0 \text{OK !} \end{cases}$$

Puisque $-y^3-y^2+2y+8\neq 0$, alors $y=0$ n'est pas une solution. Si $y=2$,

$$\begin{cases} -y^3-y^2+2y+8=-8-4+4+8=0 \text{OK !} \\ -y^2+2y=0 \text{ OK !} \end{cases}$$

Donc $y=0$ est une solution. Conclusion,

$$\boxed{\begin{cases} -y^3-y^2+2y+8=0 \\ -y^2+2y=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y=2.}$$

3. Déduisons-en l'ensemble des complexes $z=iy$, $y\in\mathbb{R}$, imaginaires purs, solutions de (E). Soit $z\in i\mathbb{R}$. Alors il existe $y\in\mathbb{R}$ tel que $z=iy$. Dès lors, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad z^3+(1+i)z^2+(2-2i)z+8i=0 \\
&\Leftrightarrow \quad (iy)^3+(1+i)(iy)^2+(2-2i)iy+8i=0 \\
&\Leftrightarrow \quad -iy^3-(1+i)y^2+(2i+2)y+8i=0 \\
&\Leftrightarrow \quad i\left(-y^3-y^2+2y+8\right)+\left(-y^2+2y\right)=0.
\end{aligned}$$

Puisque y **est réel** on obtient par unicité de la forme algébrique

$$z \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -y^3 - y^2 + 2y + 8 = 0 \\ -y^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

Par la question précédente, on en déduit

$$z \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2i.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions imaginaires pures est

$$\boxed{\mathscr{S}_{i\mathbb{R}} = \{2i\}\,.}$$

4. Déterminons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X^3 + (1+i)\,X^2 + (2-2i)\,X + 8i = (X-2i)\left(aX^2 + bX + c\right)$. On a la division euclidienne suivante :

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +(1+i)\,X^2 & +(2-2i)\,X & +8i & X - \quad 2i \\ \cline{5-5}
-(X^3 & -2iX^2) & & & X^2 + (1+3i)\,X \; -4 \\ \cline{1-2}
 & (1+3i)\,X^2 & +(2-2i)\,X & +8i & \\
 & -((1+3i)\,X^2 & +(-2i+6)\,X) & & \\ \cline{2-3}
 & & -4X & +8i & \\
 & & -(-4X & +8i) & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion, pour $\boxed{a = 1,\ b = 1+3i \text{ et } c = -4}$, on a

$$\boxed{X^3 + (1+i)\,X^2 + (2-2i)\,X + 8i = (X-2i)\left(X^2 + (1+3i)\,X - 4\right).}$$

5. Déduisons des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E) et plaçons les solutions dans le plan complexe. Par la question 3. $2i$ est une solution de l'équation (E) et donc $2i$ est une racine de $z^3 + (1+i)\,z^2 + (2-2i)\,z + 8i$. On en déduit que $z - 2i$ divise $z^3 + (1+i)\,z^2 + (2-2i)\,z + 8i$ et par la question précédente, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad (z-2i)\left(z^2 + (1+3i)\,z - 4\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2i \;\text{ OU }\; z^2 + (1+3i)\,z - 4 = 0.$$

Posons Δ le discriminant de $z^2 + (1+3i)\,z - 4$. On a

$$\Delta = (1+3i)^2 + 16 = 1 + 6i - 9 + 16 = 8 + 6i.$$

Donc par la question 1. $\delta = 3 + i$ est une racine carrée de Δ. Dès lors, les racines de $z^2 + (1+3i)\,z - 4$ sont

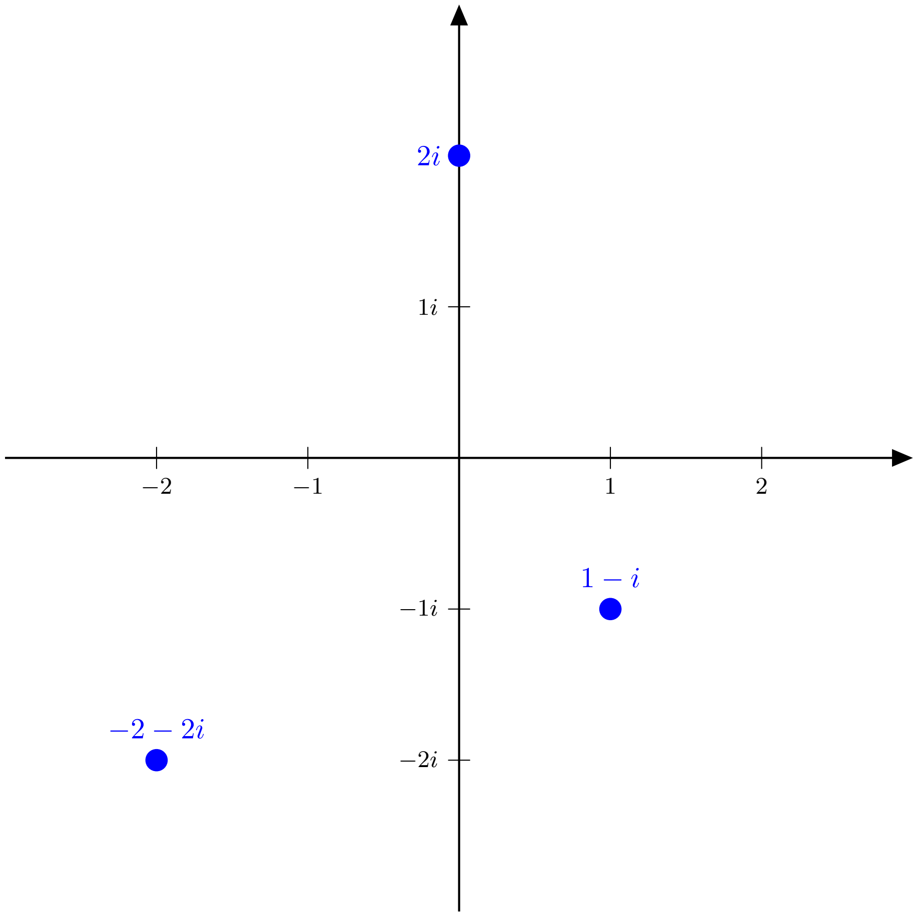
$$z_1 = \frac{-1-3i+3+i}{2} = 1 - i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-1-3i-3-i}{2} = -2-2i.$$

Ainsi,

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad z = 2i \;\text{ OU }\; z = 1 - i \;\text{ OU }\; z = -2-2i.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S} = \{2i; 1-i; -2-2i\}\,.}$$



Partie 2 : Un soupçon de géométrie

On pose A le point d'affixe $1-i$ et B celui d'affixe $-2-2i$.

6. Puisque $B \neq O$, on sait que
$$\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) \ [2\pi].$$
Or
$$\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \frac{1-i-0}{-2-2i-0} = \frac{1-i}{-2(1+i)} = -\frac{1}{2}\frac{(1-i)^2}{1+1} = -\frac{1-2i-1}{4} = -\frac{-2i}{4} = \frac{i}{2}.$$
En particulier,
$$\arg\left(\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].$$
Conclusion,
$$\boxed{\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi].}$$
On en déduit directement que
$$\boxed{\text{le triangle } BOA \text{ est rectangle en } O.}$$

7. On a les égalités suivantes :
$$OA = |z_A - z_O| = |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$OB = |z_B - z_O| = |-2-2i| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$
$$BA = |z_B - z_A| = |-2-2i-(1-i)| = |-3-i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

Donc

$$\boxed{OA = \sqrt{2}, \qquad OB = 2\sqrt{2}, \qquad BA = \sqrt{10}.}$$

On observe alors que

$$OA^2 + OB^2 = 2 + 8 = 10 = BA^2.$$

Donc par la réciproque du théorème de Pythagore, on retrouve bien que

$$\boxed{\text{le triangle } BOA \text{ est rectangle en } O.}$$

8. On pose A' l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Dès lors,

$$z_{A'} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_0) + z_O = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(-2 - 2i - 0) + 0 = i(-2 - 2i) = 2 - 2i.$$

Puisque $A' \neq O$, on a

$$\frac{z_{A'} - z_O}{z_A - z_O} = \frac{2 - 2i}{1 - i} = 2 \in \mathbb{R}_+.$$

Donc

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{A'} - z_O}{z_A - z_O}\right) \equiv 0 \ [2\pi].$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les points } O,\ A \text{ et } A' \text{ sont alignés.}}$$

Ainsi, en tournant B d'un angle de $\pi/2$, il se retrouve aligné avec O et A i.e. son image se retrouve sur (OA) ou encore cela signifie que $\widehat{BOA} = \pm\frac{\pi}{2}$ et donc on retrouve une fois de plus que $\boxed{\text{le triangle } OBA \text{ est rectangle en } O}$.

Partie 3 : Des racines n-ièmes (quand même)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(F) : \qquad \left(1 + i\sqrt{3}\right)z^n + \left(-1 + i\sqrt{3}\right)z^{2n} - 2z^{3n} - \left(1 + i\sqrt{3}\right)z^{4n} + \left(1 - i\sqrt{3}\right)z^{5n} = -2.$$

9. Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le cours, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{U}_6 \setminus \{1\} \\ &\Leftrightarrow \quad z \in \left\{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{6}} \;\middle|\; k \in [\![1;5]\!]\right\} \\ &\Leftrightarrow \quad z \in \left\{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}; \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}; -1; \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}; \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$ est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}; \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}; -1; \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}; \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}.}$$

10. Directement, par la question précédente,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; -1; -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}.}$$

11. Posons $\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. Par ce qui précède, on a

$$\omega^2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \omega^3 = -1, \qquad \omega^4 = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \omega^5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
(F_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(1+i\sqrt{3}\right) z + \left(-1+i\sqrt{3}\right) z^2 - 2z^3 - \left(1+i\sqrt{3}\right) z^4 + \left(1-i\sqrt{3}\right) z^5 = -2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,\omega\, z + 2\,\omega^2\, z^2 + 2\,\omega^3\, z^3 + 2\,\omega^4\, z^4 + 2\,\omega^5\, z^5 = -2 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + \omega\, z + \omega^2\, z^2 + \omega^3\, z^3 + \omega^4\, z^4 + \omega^5\, z^5 = 0.
\end{aligned}$$

Posons $z_1 = \omega\, z$. Alors,

$$\begin{aligned}
(F_0) \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + z_1 + z_1^2 + z_1^3 + z_1^4 + z_1^5 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z_1 \in \mathbb{U}_6 \setminus \{1\} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1;5]\!], \qquad z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1;5]\!], \qquad \omega\, z = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1;5]\!], \qquad z = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{(k-1)\pi}{3}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;4]\!], \qquad z = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (F_0) est

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_0} = \left\{1; \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}; \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}; -1; \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}.}$$

12. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\zeta = z^n$. Alors, on observe que

$$z \text{ est solution de } (E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \zeta \text{ est solution de } (F_0).$$

Donc par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;4]\!], \qquad \zeta = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;4]\!], \qquad z^n = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;4]\!],\ \exists p \in [\![0;n-1]\!], \qquad z = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3n}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2p\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{(k+6p)\pi}{3n}} \;\middle|\; (k,p) \in [\![0;4]\!] \times [\![0;n-1]\!]\right\} = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{r\pi}{3n}} \;\middle|\; r \in [\![0;6n-1]\!], r \not\equiv 5\ [6]\right\}.}$$

Problème III - Calcul d'intégrales

Partie 1 : Des primitives

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x} \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifions que g_n possède des primitives sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \neq 0$. Donc la fonction $g_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ est continue sur **l'intervalle** $\mathbb{R}$. Dès lors, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } g_n \text{ possède des primitives sur } \mathbb{R}.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Ecrivons à l'aide d'une intégrale, G_n l'unique primitive de g_n vérifiant $G_n(1) = 0$. On a vu à la question précédente que g_n est continue sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\boxed{G_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x g_n(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}}$$

est l'unique primitive de g_n vérifiant $G_n(1) = 0$.

3. Déterminons les primitives de g_0. Si $n=0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_0(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On reconnait la dérivée de la fonction arctan. Donc arctan est une primitive de g_0. Conclusion, l'ensemble des primitives de g_0 est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) + K \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4. Précisons G_0. Puisque G_0 est UNE primitive de g_0, alors $G_0 \in \mathscr{S}_0$ et donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_0(x) = \arctan(x) + K.$$

Or par définition, $G_0(1) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \arctan(1) + K = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} + K = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad K = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{G_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) - \frac{\pi}{4}. \end{array}}$$

5. Déterminons les primitives de g_1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_1(x) = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = 1 + x^2$, alors $u'(x) = 2x$. Donc $g_1 = u'/u$. Dès lors une primitive de g_1 est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\left|1+x^2\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de g_1 est donné par :

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + K \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

6. On suppose que $n = -1$. Justifions que f_{-1} admet des primitives sur $]-1;0[$. On a $f_{-1}(x) = \frac{x^{-1}}{1+x} = \frac{1}{x(1+x)}$. Dès lors, pour tout $x \in]-1;0[$, $-1 < x < 0$ et donc $x < 0$ et $1 + x > 0$. D'où $x(1+x) < 0$. Ainsi, la fonction f_1 est continue sur $]-1;0[$ comme inverse d'un polynôme ne s'annulant pas sur $]-1;0[$. Conclusion,

$$\boxed{f_1 \text{ est continue sur }]-1;0[.}$$

7. Déterminons les primitives de f_{-1} sur $]-1;0[$. Procédons à une décomposition en éléments simples. Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]-1;0[, \quad f_{-1}(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{x}.$$

Or

$$a = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (1+x) f_{-1}(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1}{x} = -1.$$

De même,

$$b = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x f_{-1}(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \left]-1;0\right[, \quad f_{-1}(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}.$$

Par suite, une primitive de f_{-1} est donnée par

$$\forall x \in \left]-1;0\right[, \quad F_{-1}(x) = \ln(|x|) - \ln(|1+x|) = \ln(|x|) - \ln(1+x) = \ln\left(\frac{|x|}{1+x}\right).$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f_{-1} sur $\left]-1;0\right[$ est donnée par

$$\boxed{\mathscr{S}_{-1} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\frac{|x|}{1+x}\right) + K \end{array} \middle| \, K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Partie 2 : Des intégrales

On suppose dans toute la suite que $n \in \mathbb{N}$ et on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

8. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;1]$, $1+x \geqslant 1 > 0$ et comme $n \geqslant 0$, alors $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ est continue sur $[0;1]$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \text{ existe.}}$$

9. Calculons I_0. Pour $n=0$, on a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln(|1+x|)\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \ln(2) - \ln(1). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_0 = \ln(2).}$$

10. Montrons que $I_1 = 1 - \ln(2)$. Pour $n=1$, on a

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Or pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

Dès lors, on obtient que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x - \ln(|1+x|)\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= 1 - \ln(2) - (0 - \ln(1)) \\ &= 1 - \ln(2). \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{I_1 = 1 - \ln(2).}$$

11. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$\begin{aligned}
I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n+1}}{1+x}\right)\mathrm{d}x \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^n\,(1++x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{n+1} - 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}.}$$

12. Déduisons-en I_2 puis I_3. Par la question précédente, pour $n = 1$,

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad I_2 = \frac{1}{2} - I_1.$$

Or par la question 10. $I_1 = 1 - \ln(2)$. Dès lors,

$$I_2 = \frac{1}{2} - (1 - \ln(2)) = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

De même,

$$I_2 + I_3 = \frac{1}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad I_3 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6} - \ln(2).$$

Conclusion,

$$\boxed{I_2 = \ln(2) - \frac{1}{2}, \qquad I_3 = \frac{5}{6} - \ln(2).}$$

13. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 2g_{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t$. Autrement dit, il nous faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2t^{2n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons $x = t^2$ ou encore $t = \sqrt{x}$. Si $x = 0$, alors $t = 0$ et si $x = 1$, $t = 1$. De plus, $t \mapsto t^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Dès lors, on obtient que

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\left(t^2\right)^n}{1+t^2}2t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2\frac{t^{2n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2g_{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 2g_{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

14. Retrouvons à l'aide de la question précédente la valeur de I_0. Pour $n = 0$ dans la question précédente, on a
$$I_0 = \int_0^1 2g_1(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 g_1(t)\,\mathrm{d}t.$$
Or par la question 5. $t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)$ est une primitive de g_1. Donc
$$I_0 = 2\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \ln(2) - 0.$$
Conclusion, on retrouve bien le même résultat qu'à la question 9.
$$\boxed{I_0 = \ln(2).}$$

15. A l'aide d'une intégration par parties, exprimons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de I_{n+1}. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons
$$\forall x \in [0;1], \quad \begin{cases} u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v(x) = \ln(1+x)\,. \end{cases}$$
Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et
$$\forall x \in [0;1], \quad \begin{cases} u'(x) = x^n \\ v'(x) = \frac{1}{1+x}. \end{cases}$$
Dès lors, par intégration par parties,
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}\ln(2) - 0 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2) - I_{n+1}}{n+1}.}$$

16. Déduisons-en la valeur de $K = \displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$. Par la question précédente, pour $n = 2$,
$$K = \int_0^1 x^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2) - I_3}{3}$$
Par la question 12. on obtient
$$K = \frac{\ln(2) - \left(\frac{5}{2} - \ln(2)\right)}{3} = \frac{4\ln(2) - 5}{6}.$$
Conclusion,
$$\boxed{K = \frac{4\ln(2) - 5}{6}.}$$

17. A l'aide du changement de variable $x = \sin(\theta)$, calculons $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\theta)}{1+\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$. Posons $x = \sin(\theta)$ i.e. $\theta = \arccos(x)$ car $x = \in [0;1]$. Si $x = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et si $x = 1$, $\theta = 0$. De plus la fonction $\theta \mapsto \sin(\theta)$

est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et $\mathrm{d}x = \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Ainsi,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\,\theta)}{1+\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\frac{\sin(\theta)}{1+\sin(\theta)}\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 2\frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2I_1. \end{aligned}$$

Conclusion, par la question 10.

$$\boxed{L = 2 - 2\ln(2).}$$

Partie 3 : Etude de la suite d'intégrales

18. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;1]$, $x^n \geqslant 0$ et $1+x > 0$ donc $\frac{x^n}{1+x} \geqslant 0$. Ainsi, par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \geqslant 0.}$$

19. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On observe que pour tout $x \in [0;1]$, $1+x \geqslant 1$. Donc $\frac{1}{1+x} \leqslant 1$. Puis, comme $x^n \geqslant 0$, on a

$$\frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n.$$

Par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.}$$

20. Déduisons-en que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et précisons sa limite. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente,

$$I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1} - 0.$$

Par la question 18. on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

21. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} J_{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$\forall x \in [0;1], \quad \begin{cases} u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v(x) = \frac{1}{1+x}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et

$$\forall x \in [0;1], \quad \begin{cases} u'(x) = x^n \\ v'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}. \end{cases}$$

Dès lors, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{1+x} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(-\frac{1}{(1+x)^2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2(n+1)} - 0 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} J_{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} J_{n+1}.}$$

22. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;1]$, on observe que $1 + x \geqslant 1$. Donc $(1+x)^2 \geqslant 1$ puis

$$0 < \frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1.$$

Puisque $x^n \geqslant 0$, on en déduit que

$$0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n.$$

Donc par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\int_0^1 0 \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x.$$

Ou encore

$$0 \leqslant J_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

23. Déduisons-en que $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question 21.

$$\frac{I_n}{\frac{1}{2n}} = 2nI_n = 2n \left(\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} J_{n+1} \right) = \frac{n}{n+1} + \frac{2n}{n+1} J_{n+1}.$$

Or par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant J_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+2}$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} J_{n+1} = 0.$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Donc par produit et somme,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} = 1 + 2\times 1\times 0 = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

Partie 4 : Une expression de I_n sous forme de somme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

24. Appliquons à I_n le changement de variable $x = \mathrm{e}^t - 1$. Posons $x = \mathrm{e}^t - 1$ i.e. $\mathrm{e}^t = x+1$ ou encore $t = \ln(1+x)$. Si $x = 0$, $t = 0$ et si $x = 1$, $t = \ln(2)$. De plus la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t - 1$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et

$$\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln(2)} \frac{(\mathrm{e}^t - 1)^n}{1+\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\ln(2)} (\mathrm{e}^t - 1)^n \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_n = \int_0^{\ln(2)} (\mathrm{e}^t - 1)^n \,\mathrm{d}t.}$$

25. Déduisons-en que $I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{tk}\,\mathrm{d}t$. Par la formule du binôme de Newton, pour tout $t \in [0;\ln(2)]$,

$$(\mathrm{e}^t - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{e}^t)^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathrm{e}^{kt}.$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\ln(2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{kt}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{tk}\,\mathrm{d}t.}$$

26. Déduisons-en une expression de I_n sous la forme d'une somme ne faisant pas intervenir d'intégrale. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculons $\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{tk}\,\mathrm{d}t$. Si $k = 0$, on a

$$\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{tk}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln(2)} 1\,\mathrm{d}t = \ln(2).$$

Si $k \neq 0$,

$$\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{tk}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{tk}}{k}\right]_{x=0}^{x=\ln(2)} = \frac{\mathrm{e}^{k\ln(2)}}{k} - \frac{1}{k} = \frac{2^k-1}{k}.$$

Ainsi, par la question précédente,

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{tk}\,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{tk}\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } n \geqslant 1 \\ &= (-1)^n \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{2^k-1}{k}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_n = (-1)^n \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{2^k-1}{k}.}$$

27. Retrouvons alors la valeur de I_3. Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned} I_3 &= (-1)^3 \ln(2) + \sum_{k=1}^{3} \binom{3}{k} (-1)^{3-k} \frac{2^k-1}{k} \\ &= -\ln(2) + 3\frac{2-1}{1} - 3\frac{4-1}{2} + \frac{8-1}{3} \\ &= -\ln(2) + 3 - \frac{9}{2} + \frac{7}{3} \\ &= -\ln(2) + \frac{18-27+14}{6} \\ &= -\ln(2) + \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien *(que c'est beau !)* la valeur obtenue à la question 12.

$$\boxed{I_3 = \frac{5}{6} - \ln(2).}$$