Epreuve de mathématiques 4
2025-2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Calcul dans $\mathbb{R}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$,
$$(I) \ : \quad \frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} < 2.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$,
$$(J) \ : \quad |3-x| + 2x + 3 < \left|x^2 - x - 2\right| + 2.$$

Problème 2 - Equations différentielles

On fixe dans ce problème :
$$I =]-1;1[\,.$$
L'objectif de ce problème est de résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur I.

$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad \left(x^2-1\right) y''(x) + 3xy'(x) - 8y(x) = 2x.$$

Partie 1 : Cours

On considère les équations suivantes :

$$(E_1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 10x$$
$$(E_2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = \mathrm{e}^{-5x}$$
$$(E_3) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 10x + \mathrm{e}^{-5x}\,.$$

1. Préciser puis résoudre (E_0) l'équation homogène associée aux équations (E_i), $i \in [\![1;3]\!]$.
On donnera le résultat sous forme ensembliste et d'espace vectoriel engendré.
2. Résoudre (E_1).
3. Résoudre (E_2).
4. Résoudre (E_3).

Partie 2 : Résolution de (F)

Soit $J =]0;\pi[$. On considère l'équation

$$(F) \qquad \forall t \in J, \qquad z''(t) + 9z(t) = -2\cos(t)\sin(t).$$

5. Préciser $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène associée à (F).
On donnera le résultat sous forme ensembliste et d'espace vectoriel engendré.
6. Déterminer $\mathscr{S}_F$ l'ensemble des solutions réelles de (F).

Partie 3 : Résolution de (E)

7. Soit $\mathscr{S}_{poly} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array} \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Déterminer toutes les fonctions de $\mathscr{S}_{poly}$ qui sont solutions de (E).

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On pose

$$z : \begin{array}{rcl} J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(t)y\left(\cos(t)\right) \end{array}$$

8. Justifier proprement que z est bien définie puis justifier que z est deux fois dérivable.
9. Calculer z' et z'' sur J.
10. En déduire l'équivalence suivante :

$$z \text{ solution de } (F) \qquad \Leftrightarrow \qquad y \text{ solution de } (E).$$

11. En déduire $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E).
    On pourra admettre que $\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$ *et* $\sin(3t) = (4\cos^2(t) - 1)\sin(t)$.
12. Vérifier la cohérence du résultat avec la question 7.

Problème 3 - Matrices

Pour tout $p \in [0;1]$, on pose $A = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'objectif est de calculer les puissances de A.

Partie 1 : Un cas particulier

1. Déterminer les valeurs de $p \in [0;1]$ pour lesquelles la matrice A est inversible.
2. On suppose dans cette question uniquement que $p = \frac{1}{2}$ et on pose $A_2 = 2A$.
   (a) Calculer A_2, A_2^2, A_2^3 et A_2^4.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_2^n.
   On pourra observer que dans chaque matrice $a_{1,3} = a_{2,3} - a_{1,2}$.
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Partie 2 : Méthode 1, par décomposition

On suppose désormais et durant tout le reste du problème que $p \in]0;1[$ et on définit $B = \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = A - B$. Enfin, on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calculer C.
4. Préciser pour tout $n \in \mathbb{N}$, C^n.
5. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
6. On pose $D = P^{-1}BP$. Sans utiliser l'expression de P^{-1} trouvée à la question précédente, montrer que $\mathrm{Tr}\,(D) = \mathrm{Tr}\,(B)$.
7. Calculer D et vérifier le résultat de la question précédente.
8. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de B^n en fonction de P, D^n, P^{-1} que l'on démontrera soigneusement.
9. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, B^n exprimée en fonction de ses coefficients.

10. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de ses coefficients.
11. Vérifier la cohérence de votre résultat avec la question 2.a pour $p = 1/2$ et $n = 3$.
12. La formule de la question 10. est-elle encore vraie pour $n = -1$?

Partie 3 : Par division euclidienne

On se propose de calculer les puissances de B par une seconde méthode.

13. Calculer $B^2 - (1+p)\,B$.
14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ et $R_n = \alpha_n X + \beta_n$ le reste et Q_n le quotient de la division euclidienne de X^n par $P = X^2 - (1+p)\,X + p$. Calculer α_n et β_n.
15. Retrouver le résultat de la question 9.

Partie 4 : Méthode 2, par étude de suites

On ne pourra pas utiliser les résultats précédents, mais on pourra souligner au correcteur les cohérences trouvées.

16. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On utilisera dans la preuve l'égalité $A^{n+1} = A \times A^n$. Préciser également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les relations de récurrence de a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n (établies au cours de la preuve).
17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n = c_n - 1$.
    (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation de récurrence entre d_{n+1} et d_n.
    (b) Quelle est la nature de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$? En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d_n puis c_n en fonction de n.
18. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \frac{a_n}{p^n}$. Déterminer la nature de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
    (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de a_n en fonction de n.
19. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{E}_m = \{ M \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R}) \mid MU = U \}$.
    (a) Donner un exemple simple de matrice qui soit dans $\mathcal{E}_m$ et un exemple de matrice qui ne soit pas dans $\mathcal{E}_m$.
    (b) Montrer que $\mathcal{E}_m$ est stable par multiplication : si $(M, N) \in \mathcal{E}_m^2$, alors $MN \in \mathcal{E}_m$.
    (c) Si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ alors exprimer les coefficients de MU en fonction des coefficients de M.

    On suppose à nouveau que $m = 3$.
    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in \mathcal{E}_3$.
    (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression de b_n en fonction de n.