Corrigé du Devoir Surveillé 4
Calcul dans $\mathbb{R}$, équations différentielles, matrices

Problème I - Calcul dans $\mathbb{R}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$(I) \text{ est bien définie} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+4 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 2\}.$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 2\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(I) \ : \quad & \frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{(2x+5)(x+4) - (x-2)(3x-6)}{(x-2)(x+4)} < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2x^2+8x+5x+20-3x^2+6x+6x-12}{(x-2)(x+4)} < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{-x^2+25x+8}{(x-2)(x+4)} < 2.
\end{aligned}$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$(x-2)(x+4)$	$+$	$-$	$+$	

Premier cas, $x \in \left]-\infty; -4\right[\cup \left]2; +\infty\right[$. Alors,

$$\begin{aligned}
(I) \quad \Leftrightarrow \quad & -x^2+25x+8 < 2(x-2)(x+4) \\
\Leftrightarrow \quad & -x^2+25x+8 < 2x^2+4x-16 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < 3x^2-21x-24 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < x^2-7x-8.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = 49+32 = 81 = 9^2$. Donc les racines associées sont $\frac{7-9}{2} = -1$ et $\frac{7+9}{2} = 8$. D'où

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \ \text{ OU } \ x > 8.$$

Donc dans ce cas, l'ensemble solution est donné par

$$\mathscr{S}_1 = \left]-\infty; -4\right[\cup \left]8; +\infty\right[.$$

Second cas, $x \in \left]-4; 2\right[$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
(I) \quad \Leftrightarrow \quad & -x^2+25x+8 > 2(x-2)(x+4) \\
\Leftrightarrow \quad & -x^2+25x+8 > 2x^2+4x-16 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 > 3x^2-21x-24 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 > x^2-7x-8.
\end{aligned}$$

Les racines sont toujours -1 et 8. D'où

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \left]-1;8\right[.$$

Donc dans ce cas, l'ensemble solution est donné par

$$\mathscr{S}_2 = \left]-1;2\right[.$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S}_I = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \left]-\infty;-4\right[\cup \left]-1;2\right[\cup \left]8;+\infty\right[.}$$

Vérification : si $x=-5$, $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} = \frac{-5}{-7} - \frac{-21}{-1} = \frac{5}{7} - 21 < 1 - 21 < 2$ *OK ! Si* $x=0$, $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1 < 2$ *OK ! Ou encore* $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2 - 3 = -1 < 2$ *OK ! Inversement, si* $x=-3$, $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} = \frac{-1}{-5} - \frac{-15}{1} = \frac{1}{5} + 15 > 2$ *OK ! Si* $x=3$, $\frac{2x+5}{x-2} - \frac{3x-6}{x+4} = \frac{11}{1} - \frac{3}{7} > 11 - 1 = 10 > 2$ *OK !*

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$(J) \ : \quad |3-x| + 2x + 3 < \left|x^2 - x - 2\right| + 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad |3-x| + 2x + 1 < \left|x^2 - x - 2\right|.$$

Soit Δ le discriminant de $x^2 - x - 2$. On a $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$. Donc les racines associées sont $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$. On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$\lvert 3-x\rvert$		$3-x$		$3-x$		$3-x$	0	$x-3$	
$\lvert x^2-x-2\rvert$		x^2-x-2	0	$2+x-x^2$	0	x^2-x-2		x^2-x-2	

Premier cas, $x \in \left]-\infty;-1\right] \cup [2;3]$. Alors,

$$(J) \qquad \Leftrightarrow \qquad 3 - x + 2x + 1 < x^2 - x - 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < x^2 - 2x - 6.$$

Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = 4 + 24 = 28 = 4 \times 7$. Donc les racines associées sont $r_1 = \frac{2-2\sqrt{7}}{2} = 1 - \sqrt{7}$ et $r_2 = 1 + \sqrt{7}$. On a $2 < \sqrt{7} < 3$. Donc $-2 < r_1 < -1$ et $3 < r_2 < 4$. Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_1 = \left]-\infty;r_1\right[= \left]-\infty;1-\sqrt{7}\right[.$$

Deuxième cas, $x \in [-1;2]$. Alors,

$$(J) \qquad \Leftrightarrow \qquad 3 - x + 2x + 1 < 2 + x - x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 < -2 \text{ impossible.}$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_2 = \emptyset.$$

Troisième cas, $x \in [3;+\infty[$. Alors,

$$\begin{aligned}
(J) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x - 3 + 2x + 1 < x^2 - x - 2 \\
&\Leftrightarrow \qquad 0 < x^2 - 4x = x(x-4) \\
&\Leftrightarrow \qquad x < 0 \quad \text{OU} \quad x > 4.
\end{aligned}$$

D'où, dans ce cas,

$$\mathscr{S}_3 = \left]r_4;+\infty\right[= \left]4;+\infty\right[.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_J = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3 = \left]-\infty;1-\sqrt{7}\right[\cup \left]4;+\infty\right[.}$$

Vérification : si $x=-2$, $|3-x| + 2x + 3 < |x^2 - x - 2| + 2 \Leftrightarrow |5| - 1 < |4 + 2 - 2| + 2 \Leftrightarrow 4 < 6$ *OK ! Si* $x=0$, $|3-x| + 2x + 3 < |x^2 - x - 2| + 2 \Leftrightarrow 3 + 3 < 2 + 2$ *ce qui est bien faux, OK ! Si* $x=5$, $|3-x| + 2x + 3 < |x^2 - x - 2| + 2 \Leftrightarrow 2 + 13 < |25 - 7| + 2 \Leftrightarrow 15 < 20$ *OK !*

Problème II - Equations différentielles d'ordre 2

On fixe dans ce problème :
$$I =]-1;1[\,.$$
L'objectif de ce problème est de résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur I.

$$(E) \qquad \forall x \in I, \qquad \left(x^2-1\right) y''(x) + 3xy'(x) - 8y(x) = 2x.$$

Partie 1 : Cours

On considère les équations suivantes :

$$(E_1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 10x$$
$$(E_2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = \mathrm{e}^{-5x}$$
$$(E_3) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 10x + \mathrm{e}^{-5x}\,.$$

1. L'équation (E_0) homogène associée aux (E_i) est donnée par

$$\boxed{(E_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 0.}$$

Soit (E_c) l'équation caractéristique associé. On a
$$(E_c)\ : r^2 + 3r - 10 = 0.$$
Soit Δ son discriminant. On a $\Delta = 9 + 40 = 49 = 7^2$. Donc les racines de (E_c) sont
$$r_1 = \frac{-3-7}{2} = -5 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-3+7}{2} = 2.$$
Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par
$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\,\mathrm{e}^{-5x} + B\,\mathrm{e}^{2x} \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-5x} \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{2x} \end{array} \right).}$$

2. Cherchons une solution polynomiale de degré 1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $y_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$. La fonction y_1 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_1'(x) = a \qquad\qquad y_1''(x) = 0.$$
Par conséquent,
$$\begin{aligned} y_1 \text{ est solution de } (E_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ 0 + 3a - 10\,(ax+b) = 10x \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ -10ax + 3a - 10b = 10x. \end{aligned}$$
On note alors qu'il suffit de prendre
$$\begin{cases} -10a = 10 \\ 3a - 10b = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{3a}{10} = -\frac{3}{10}. \end{cases}$$
Donc $y_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x - \frac{3}{10} \end{array}$ est une solution de (E_1). Donc par la question précédente, on conclut que l'ensemble des solutions de (E_1) est donné par
$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x - \frac{3}{10} + A\,\mathrm{e}^{-5x} + B\,\mathrm{e}^{2x} \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

3. Puisque -5 est une solution de l'équation caractéristique (E_c), on cherche une solution sous la forme $x \mapsto ax\,\mathrm{e}^{-5x}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $y_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax\,\mathrm{e}^{-5x} \end{array}$. La fonction y_2 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_2'(x) = a\,(1-5x)\,\mathrm{e}^{-5x} \qquad\qquad y_2''(x) = a\,(-5-5\,(1-5x))\,\mathrm{e}^{-5x} = a\,(-10+25x)\,\mathrm{e}^{-5x}.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lcll} y_2 \text{ est solution de } (E_2) & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ a\,(-10+25x)\,\mathrm{e}^{-5x} + 3a\,(1-5x)\,\mathrm{e}^{-5x} - 10ax\,\mathrm{e}^{-5x} = \mathrm{e}^{-5x} & \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ a\,(-10+25x) + 3a\,(1-5x) - 10ax = 1 & \text{car } \mathrm{e}^{-5x} \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ (25a-15a-10a)\,x - 10a + 3a = 1 & \\ & \Leftrightarrow & -7a = 1. & \end{array}$$

Par conséquent $y_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{x}{7}\,\mathrm{e}^{-5x} \end{array}$ est une solution de (E_2). Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_2) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{x}{7}\,\mathrm{e}^{-5x} + A\,\mathrm{e}^{-5x} + B\,\mathrm{e}^{2x} \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

4. On a vu que $y_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x - \frac{3}{10} \end{array}$ est une solution de (E_1) et $y_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{x}{7}\,\mathrm{e}^{-5x} \end{array}$ est une solution de (E_2) donc par le principe de superposition, on en déduit que $y_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x - \frac{3}{10} - \frac{x}{7}\,\mathrm{e}^{-5x} \end{array}$ est une solution de (E_3). Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_3) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_3 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x - \frac{3}{10} - \frac{x}{7}\,\mathrm{e}^{-5x} + A\,\mathrm{e}^{-5x} + B\,\mathrm{e}^{2x} \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie 2 : Résolution de (F)

Soit $J =]0;\pi[$. On considère l'équation

$$(F) \qquad\qquad \forall t \in J, \qquad z''(t) + 9z(t) = -2\cos(t)\sin(t).$$

5. L'équation (F_0) associée à (F) est donnée par

$$(F_0) \qquad\qquad \forall t \in J, \qquad z''(t) + 9z(t) = 0.$$

Soit (E_c) l'équation caractéristique associée. On a $(E_c) : r^2 + 9 = 0 \ \Leftrightarrow\ r^2 = -9 = (3i)^2$. Donc les racines de (E_c) sont complexes et données par

$$r_1 = 3i \qquad \text{et} \qquad r_2 = -3i.$$

Donc $\alpha = \mathrm{Re}\,(r_1) = 0$ et $\beta = \mathrm{Im}\,(r_1) = 3$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\cos(3t) + B\sin(3t) \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

ou encore

$$\boxed{\mathscr{S}_H = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos(3t) \end{array}, \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(3t) \end{array} \right).}$$

6. Commençons par noter que pour tout $t \in J$, $-2\cos(t)\sin(t) = -\sin(2t) = \operatorname{Im}\left(-\,\mathrm{e}^{2it}\right)$. Considérons alors l'équation suivante d'inconnue u une fonction deux fois dérivable sur J à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$(G) \qquad \forall t \in J, \qquad u''(t) + 9u(t) = -\,\mathrm{e}^{2it}.$$

Puisque $2i$ n'est pas une solution de l'équation caractéristique (E_c), on cherche une solution sous la forme $a\,\mathrm{e}^{2it}$. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $u_p : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & a\,\mathrm{e}^{2it} \end{array}$. Alors la fonction u est deux fois dérivable sur J et

$$\begin{array}{lcll} u \text{ solution de } (G) & \Leftrightarrow & \forall t \in J,\ a\,(2i)^2\,\mathrm{e}^{2it} + 9a\,\mathrm{e}^{2it} = -\,\mathrm{e}^{2it} & \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in J,\ a\,(2i)^2 + 9a = -1 & \text{car } \mathrm{e}^{2it} \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & -4a + 9a = -1 & \\ & \Leftrightarrow & a = -\dfrac{1}{5}. & \end{array}$$

Donc $u : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{\mathrm{e}^{2it}}{5} \end{array}$ est une solution de (G). Par conséquent, la fonction

$$z = \operatorname{Im}(u) \ : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \operatorname{Im}\left(-\frac{\mathrm{e}^{2it}}{5}\right) = -\frac{\sin(2t)}{5} \end{array}$$

est une solution de (F). Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & A\cos(3t) + B\sin(3t) - \frac{\sin(2t)}{5} \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Partie 3 : Résolution de (E)

7. Soit $\mathscr{S}_{poly} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Déterminons toutes les fonctions de $\mathscr{S}_{poly}$ qui sont solutions de (E). Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$y_p : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur I et

$$\begin{array}{lcll} y_p \text{ est solution de } (E) & \Leftrightarrow & \forall x \in I, & \left(x^2-1\right) y_p''(x) + 3xy_p'(x) - 8y_p(x) = 2x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in I, & \left(x^2-1\right) \times 0 + 3xa - 8\,(ax+b) = 2x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in I, & -5ax - 8b = 2x. \end{array}$$

En particulier, si $x = 0$, alors $-8b = 0$ i.e. $b = 0$. Tandis que si $x = 1$, $-5a - 8b = -5a = 2$. Donc $a = -\frac{2}{5}$. Réciproquement si $\begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = 0 \end{cases}$, alors $\forall x \in I$, $-5ax - 8b = 2x$. Conclusion, il existe une unique fonction de $\mathscr{S}_{poly}$ solution de (E) :

$$\boxed{\forall y_p \in \mathscr{S}_{poly}, \qquad y_p \text{ solution de } (E) \qquad \Leftrightarrow \qquad y_p : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{2}{5}x \end{array}}$$

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On pose

$$z : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(t)y\left(\cos(t)\right) \end{array}$$

8. Pour tout $t \in J =]0;\pi[$, on a $\cos(t) \in]-1;1[= I$ et y est bien définie sur I. Donc la fonction $t \mapsto y(\cos(t))$ est bien définie sur J. Donc

$$\boxed{z \text{ est bien définie sur } J \text{ et même } z \text{ est deux fois dérivable sur } J}$$

comme produit et composée de fonctions qui le sont sur leurs domaines de définition respectifs.

9. On a

$$\forall t \in J, \qquad z'(t) = \cos(t)y(\cos(t)) - \sin(t)\sin(t)y'(\cos(t)) = \cos(t)y(\cos(t)) - \sin^2(t)y'(\cos(t)).$$

Puis, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} z''(t) &= -\sin(t)y(\cos(t)) - \sin(t)\cos(t)y'(\cos(t)) - 2\cos(t)\sin(t)y'(\cos(t)) + \sin^3(t)y''(\cos(t)) \\ &= -\sin(t)y(\cos(t)) - 3\sin(t)\cos(t)y'(\cos(t)) + \sin^3(t)y''(\cos(t)). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall t \in J, \qquad \begin{aligned} &\boxed{z'(t) = \cos(t)y(\cos(t)) - \sin^2(t)y'(\cos(t))} \\ &\boxed{z''(t) = -\sin(t)y(\cos(t)) - 3\sin(t)\cos(t)y'(\cos(t)) + \sin^3(t)y''(\cos(t)).} \end{aligned}$$

10. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned} & z \text{ solution de } (F) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in J,\ z''(t) + 9z(t) = -2\cos(t)\sin(t) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in J,\ -\sin(t)y(\cos(t)) - 3\sin(t)\cos(t)y'(\cos(t)) \\ & \qquad\qquad + \sin^3(t)y''(\cos(t)) + 9\sin(t)y(\cos(t)) = -2\cos(t)\sin(t) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in J,\ \sin^3(t)y''(\cos(t)) - 3\sin(t)\cos(t)y'(\cos(t)) + 8\sin(t)y(\cos(t)) = -2\cos(t)\sin(t). \end{aligned}$$

Pour tout $t \in J =]0;\pi[$, on a $\sin(t) \neq 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} & z \text{ solution de } (F) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in J,\ \sin^2(t)y''(\cos(t)) - 3\cos(t)y'(\cos(t)) + 8y(\cos(t)) = -2\cos(t) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in J,\ \left(1 - \cos^2(t)\right)y''(\cos(t)) - 3\cos(t)y'(\cos(t)) + 8y(\cos(t)) = -2\cos(t) \end{aligned}$$

Posons $x = \cos(t)$ i.e. $t = \arccos(x)$. On a $t \in J \Leftrightarrow x \in I$. Dès lors, on obtient,

$$\begin{aligned} & z \text{ solution de } (F) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in J,\ \sin^2(t)y''(\cos(t)) - 3\cos(t)y'(\cos(t)) + 8y(\cos(t)) = -2\cos(t) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in I,\ \left(1 - x^2\right)y''(x) - 3xy'(x) + 8y(x) = -2x \\ \Leftrightarrow \quad & y \text{ solution de } (E). \end{aligned}$$

Conclusion, on a bien démontré que

$$\boxed{z \text{ solution de } (F) \qquad \Leftrightarrow \qquad y \text{ solution de } (E).}$$

11. Par la question précédente, en gardant les mêmes notations, on a

$$y \in \mathscr{S}_E \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \mathscr{S}_F.$$

Donc par la question 6., on obtient

$$\begin{aligned} y \in \mathscr{S}_E \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in J, \quad z(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t) - \frac{\sin(2t)}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in J, \quad \sin(t) y(\cos(t)) = A\cos(3t) + B\sin(3t) - \frac{\sin(2t)}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in J, \quad y(\cos(t)) = \underbrace{\frac{5A\cos(3t) + 5B\sin(3t) - \sin(2t)}{5\sin(t)}}_{=u(t)}. \end{aligned}$$

Or l'énoncé nous rappelait que pour tout $t \in J$,

$$\cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t) \qquad \text{et} \qquad \sin(3t) = \left(4\cos^2(t) - 1\right)\sin(t).$$

Ainsi, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{5A\left(4\cos^3(t) - 3\cos(t)\right) + 5B\left(4\cos^2(t) - 1\right)\sin(t) - 2\sin(t)\cos(t)}{5\sin(t)} \\ &= \frac{A\left(4\cos^3(t) - 3\cos(t)\right)}{\sin(t)} + B\left(4\cos^2(t) - 1\right) - \frac{2}{5}\cos(t). \end{aligned}$$

On note enfin que pour tout $t \in J$, $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ et $\sin(t) > 0$ donc $\sin(t) = +\sqrt{1-\cos^2(t)}$. Finalement, par le changement de variable $x = \cos(t)$, on obtient que

$$y \in \mathscr{S}_E \quad \Leftrightarrow \quad \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in I, \quad y(x) = A\frac{(4x^3 - 3x)}{\sqrt{1-x^2}} + B\left(4x^2 - 1\right) - \frac{2}{5}x.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\frac{(4x^3-3x)}{\sqrt{1-x^2}} + B\left(4x^2-1\right) - \frac{2}{5}x \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

12. Notamment si $A = B = 0$, on retrouve que la fonction $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{2}{5}x \end{array}$ est une solution de (E), $\boxed{\text{ce qui est cohérent avec le résultat de la question 7.}}$.

Problème III - Matrices

Pour tout $p \in [0;1]$, on pose $A = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'objectif est de calculer les puissances de A.

Partie 1 : Un cas particulier

1. Déterminons les valeurs de $p \in [0;1]$ pour lesquels la matrice A est inversible. Puisque la matrice A est triangulaire supérieure, on en déduit que A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls i.e.

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} p \neq 0 \\ p \neq 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad p \neq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad p \in \,]0;1]\,.}$$

2. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$ et on pose $A_2 = 2A$.

(a) Calculons A_2, A_2^2, A_2^3 et A_2^4. Puisque $p = 1/2$, on a
$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi,
$$A_2 = 2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Puis,
$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
Et,
$$A_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$
Enfin,
$$A_2^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$
Conclusion,
$$\boxed{A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_2^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.}$$

(b) Déduisons-en pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_2^n. *On pourra observer que dans chaque matrice $a_{1,3} = a_{2,3} - a_{1,2}$.*
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathscr{P}(n) \quad : « \; A_2^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \; ».$$
Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $n = 0$, on a
$$\begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^0 - 1 \\ 0 & 1 & 2^0 - 1 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = I_3 = A_2^0.$$
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Alors,
$$\begin{aligned} A_2^{n+1} = A_2 A_2^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 2^n - n - 1 + 2^n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 + 2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 2^{n+1} - (n+1) - 1 \\ 0 & 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A_2^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.}$$

(c) Déduisons-en pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n. Puisque $A = \frac{1}{2}A_2$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{2^n}A_2^n$. Donc par la question précédente,

$$A^n = \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^n} & 1 - \frac{n+1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^n} & 1 - \frac{n+1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Partie 2 : Méthode 1, par décomposition

On suppose désormais et durant tout le reste du problème que $p \in]0;1[$ et on définit $B = \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = A - B$. Enfin, on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On a directement,

$$\boxed{C = A - B = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & -(1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

4. On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & -(1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1-p & -(1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1-p & -(1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$C^n = C^2 C^{n-2} = 0_3 \times C^{n-2} = 0_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{C^0 = I_3,\ C^1 = C \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ C^n = 0_3.}$$

5. On a les opérations élémentaires suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

Donc la matrice P est inversible et

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

Conclusion, $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

6. On pose $D = P^{-1}BP$. On sait que pour tout $(U, V) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(UV) = \text{Tr}(VU)$. Par conséquent, en prenant $U = P^{-1}$ et $V = BP$,

$$\boxed{\text{Tr}(D) = \text{Tr}\left(P^{-1}BP\right) = \text{Tr}\left(BPP^{-1}\right) = \text{Tr}(BI_3) = \text{Tr}(B).}$$

7. On a

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}BP \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 & 1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

On vérifie alors que $\text{Tr}(D) = p+p+1 = 2p+1$ et $\text{Tr}(B) = p+p+1 = 2p+1$, donc $\boxed{\text{Tr}(D) = \text{Tr}(B)}$.

8. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } B^n = PD^nP^{-1} \text{ »}.$$

Procédons par récurrence.

Initialisation. Si $n = 0$, on a par définition $B^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$. Donc $B^0 = PD^0P^{-1}$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Nous allons avoir besoin dans la suite également de $\mathscr{P}(1)$. Démontrons donc $\mathscr{P}(1)$. Si $n = 1$, on a, par définition de B,

$$PD^1P^{-1} = PDP^{-1} = P\left(P^{-1}BP\right)P^{-1} = \left(PP^{-1}\right)B\left(PP^{-1}\right) = I_3BI_3 = B = B^1 = B.$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= B^n B = PD^nP^{-1}B && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} && \text{par } \mathscr{P}(1) \text{ démontré à la question précédente} \\ &= PD^nI_3DP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

On a donc bien démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = PD^nP^{-1}.}$$

9. Puisque D est diagonale, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} B = PDP^{-1} &= P\begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} p^n & 0 & -p^n \\ 0 & p^n & -p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^n & 0 & -p^n \\ 0 & p^n & -p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1-p^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1-p^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

10. On a $C = A - B$ i.e. $A = B + C$. De plus,

$$BC = \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-p & -(1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p(1-p) & -p(1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} CB &= \begin{pmatrix} 0 & 1-p & -(1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & p(1-p) & (1-p)^2 - (1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & p(1-p) & (1-p)(1-p-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & p(1-p) & -p(1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $BC = CB$ i.e. les matrices B et C commutent. Par la formule du binôme de Newton, on a pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n = (B+C)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^k B^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} C^0 B^n + \binom{n}{1} C^1 B^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{C^k}_{=0 \text{car } k \geqslant 2} B^{n-k} \\ &= B^n + nCB^{n-1} + 0_3 \\ &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1-p^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1-p & -(1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{n-1} & 0 & 1-p^{n-1} \\ 0 & p^{n-1} & 1-p^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1-p^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & p^{n-1}(1-p) & (1-p)\left(1-p^{n-1}\right) - (1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1-p^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & p^{n-1}(1-p) & (1-p)\left(1-p^{n-1}-1\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1-p^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & p^{n-1}(1-p) & -p^{n-1}(1-p) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^n & np^{n-1}(1-p) & 1-p^n-np^{n-1}+np^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$A^n = \begin{pmatrix} p^n & np^{n-1}(1-p) & 1+(n-1)p^n - np^{n-1} \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifions si l'on peut étendre cette formule pour $n = 1$ et $n = 0$. Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{pmatrix} p^n & np^{n-1}(1-p) & 1+(n-1)p^n - np^{n-1} \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & (1-p) & 1+0-1 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Si $n=0$,

$$\begin{pmatrix} p^n & np^{n-1}(1-p) & 1+(n-1)p^n-np^{n-1} \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-1-0 \\ 0 & 1 & 1-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Donc la formule reste vraie si $n=0$ ou $n=1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad A^n = \begin{pmatrix} p^n & np^{n-1}(1-p) & 1+(n-1)p^n-np^{n-1} \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

11. Vérifions la cohérence de notre résultat avec la question 2.a pour $p=1/2$ et $n=3$. Si $p=1/2$ et $n=3$, par la question précédente, on obtient,

$$A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 3\frac{1}{4}\frac{1}{2} & 1+2\frac{1}{8}-3\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & 1-\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A_2^3 = (2A)^3 = 8A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8+2-6 \\ 0 & 1 & 8-1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{on retrouve bien le résultat de la question 2.a.}}$$

12. Pour $n=-1$, on a

$$\begin{pmatrix} p^n & np^{n-1}(1-p) & 1+(n-1)p^n-np^{n-1} \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{1-p}{p^2} & 1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2} \\ 0 & \frac{1}{p} & 1-\frac{1}{p} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{car } p\neq 0.$$

Posons $A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{1-p}{p^2} & 1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2} \\ 0 & \frac{1}{p} & 1-\frac{1}{p} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} AA' &= \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{1-p}{p^2} & 1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2} \\ 0 & \frac{1}{p} & 1-\frac{1}{p} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-p}{p}+\frac{1-p}{p} & p-2+\frac{1}{p}+(1-p)\left(1-\frac{1}{p}\right) \\ 0 & 1 & p-1+1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & p-2+\frac{1}{p}+1-\frac{1}{p}-p+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_3. \end{aligned}$$

Donc A est bien inversible (déjà vu à la question 1. car $p\neq 0$) et la formule reste encore vraie pour $n=-1$:

$$\boxed{A^{-1} = A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{1-p}{p^2} & 1-\frac{2}{p}+\frac{1}{p^2} \\ 0 & \frac{1}{p} & 1-\frac{1}{p} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Partie 3 : Par division euclidienne

On se propose de calculer les puissances de B par une seconde méthode.

13. Calculons $B^2-(1+p)\,B$. Puisque $B=\begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors,

$$\begin{aligned}
B^2 &= \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p^2 & 0 & p\,(1-p)+1-p \\ 0 & p^2 & p\,(1-p)+1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p^2 & 0 & (p+1)\,(1-p) \\ 0 & p^2 & (p+1)\,(1-p) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 1-p^2 \\ 0 & p^2 & 1-p^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
B^2-(1+p)\,B &= \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 1-p^2 \\ 0 & p^2 & 1-p^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p\,(1+p) & 0 & 1-p^2 \\ 0 & p\,(1+p) & 1-p^2 \\ 0 & 0 & 1+p \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{B^2-(1+p)\,B=-pI_3.}$$

14. Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $(\alpha_n,\beta_n)\in\mathbb{R}^2$ et $R_n=\alpha_nX+\beta_n$ le reste et Q_n le quotient de la division euclidienne de X^n par $P=X^2-(1+p)\,X+p$. Calculons α_n et β_n. On a

$$X^n=Q_n(X)P(X)+R_n(X)=Q_n(X)P(X)+\alpha_nX+\beta_n.$$

Déterminons les racines de P. On sait que la somme des racines fait $1+p$ et le produit p. Donc 1 et p sont les deux racines de P. Dès lors, en évaluant la relation précédente pour $X=1$ et $X=p$, on obtient

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \alpha_n+\beta_n=1 \\ p\alpha_n+\beta_n=p^n \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n+\beta_n=1 \\ (1-p)\,\beta_n=p^n-p=p\left(p^{n-1}-1\right) \end{cases} \qquad L_2\leftarrow L_2-pL_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n=1-\beta_n=1+\frac{p\left(1-p^{n-1}\right)}{1-p}=\frac{1-p+p-p^n}{1-p}=\frac{1-p^n}{1-p} \\ \beta_n=\frac{p\left(p^{n-1}-1\right)}{1-p}=-\frac{p\left(1-p^{n-1}\right)}{1-p} \end{cases} \qquad \text{car } p\neq 1.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} \alpha_n=\frac{1-p^n}{1-p} \\ \beta_n=-\frac{p\left(1-p^{n-1}\right)}{1-p}. \end{cases}}$$

15. Retrouvons le résultat de la question 9. On sait que $X^n = Q_n(X)P(X) + \alpha_n X + \beta_n$. En prenant $X = B$, on obtient,
$$B^n = Q_n(B)P(B) + \alpha_n B + \beta_n I_3.$$
Or par la question 13. $P(B) = B^2 - (1+p)\,B + pI_3 = O_3$. Donc
$$B^n = \alpha_n B + \beta_n I_3.$$
Donc par la question précédente,
$$\begin{aligned} B^n &= \frac{1-p^n}{1-p}\begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{p\left(1-p^{n-1}\right)}{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p-p^{n+1}-p+p^n}{1-p} & 0 & 1-p^n \\ 0 & \frac{p-p^{n+1}-p+p^n}{1-p} & 1-p^n \\ 0 & 0 & \frac{1-p^n-p+p^n}{1-p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p^n-p^{n+1}}{1-p} & 0 & 1-p^n \\ 0 & \frac{p^n-p^{n+1}}{1-p} & 1-p^n \\ 0 & 0 & \frac{1-p}{1-p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1-p^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
On retrouve bien les résultat de la question 9.
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1-p^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Partie 4 : Méthode 2, par étude de suites

On ne pourra pas utiliser les résultats précédents, mais on pourra souligner au correcteur les cohérences trouvées.

16. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\mathscr{P}(n) : \text{« } \exists\,(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3,\ A^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ »}.$$
Initialisation. Si $n = 1$, alors $A = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc en posant $a_1 = 1-p$, $b_1 = 0$ et $c_1 = 1-p$ on a bien l'existence de trois réels tels que $A = \begin{pmatrix} p^1 & a_1 & b_1 \\ 0 & p^1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a $A^{n+1} = A \times A^n$. Or hypothèse de récurrence, il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc
$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & pa_n + (1-p)\,p^n & pb_n + (1-p)\,c_n \\ 0 & p^{n+1} & pc_n + 1 - p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en posant

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + (1-p)\, p^n \\ b_{n+1} = pb_n + (1-p)\, c_n \\ c_{n+1} = pc_n + 1 - p \end{cases},$$

on observe que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} p^{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & p^{n+1} & c_{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3, \qquad A^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

De plus,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = pa_n + (1-p)\, p^n \\ b_{n+1} = pb_n + (1-p)\, c_n \\ c_{n+1} = pc_n + 1 - p \end{cases}.}$$

17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n = c_n - 1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a directement,

$$d_{n+1} = c_{n+1} - 1 = pc_n + 1 - p - 1 = pc_n - p = p\,(c_n - 1) = pd_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{d_{n+1} = pd_n.}$$

(b) On observe donc que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison p. PAr conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_n = p^{n-1} d_1 = p^{n-1}\,(c_1 - 1)\,.$$

Or nous avons vu à la question 16. que $c_1 = 1 - p$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_n = p^{n-1}\,(1 - p - 1) = -p^n.}$$

Par suite,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = d_n + 1 = 1 - p^n.}$$

Cela est cohérent avec la question 10.. *Nous généraliserons cette méthode au chapitre sur les suites : $c_{n+1} = \alpha c_n + \beta$ est une suite arithmético-géométrique. On cherche alors le point fixe ω (ici 1) puis l'on observe que $d_n = c_n - \omega$ est géométrique.*

18. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n = \frac{a_n}{p^n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} &= \frac{pa_n + (1-p)\, p^n}{p^{n+1}} \qquad \text{par la question 16.} \\ &= \frac{a_n}{p^n} + \frac{1-p}{p} \\ &= \alpha_n + \frac{1-p}{p}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite arithmétique de raison } \frac{1-p}{p}.}$$

(b) On déduit donc de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\frac{1-p}{p} = \frac{a_1}{p} + (n-1)\frac{1-p}{p} = \frac{1-p}{p} + (n-1)\frac{1-p}{p} = n\frac{1-p}{p}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = p^n\alpha^n = p^n n\frac{1-p}{p} = np^{n-1}(1-p)\,.}$$

Cela est cohérent avec la question 16..

On pouvait aussi montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} - 2pa_{n+1} + p^2a_n = 0$ et on observe alors que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ce que l'on appelle une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

19. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $U = \begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{E}_m = \{M \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R}) \mid MU = U\}$.

(a) Si $M = I_m$, alors on a $MU = I_mU = U$. Donc $\boxed{I_m \in \mathcal{E}_m}$. A contrario, $0_mU = 0_{m,1} \neq U$. Donc $\boxed{0_m \notin \mathcal{E}_m}$.

(b) Soit $(M,N) \in \mathcal{E}_m^2$. Posons $P = MN$. On a

$$\begin{aligned} PU = (MN)U = M(NU) &= M(U) && \text{car } N \in \mathcal{E}_m \\ &= U && \text{car } M \in \mathcal{E}_m. \end{aligned}$$

Donc $P\mathcal{E}_m$. Conclusion, E_m est stable par multiplication :

$$\boxed{(M,N) \in \mathcal{E}_m^2 \;\Rightarrow\; MN \in E_m.}$$

(c) Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$. On a $U = (u_{i,1})_{1\leqslant i\leqslant m}$ avec pour tout $j \in [\![1;m]\!]$, $u_{i,1} = 1$. Notons $N = MU$ et $N = (n_{i,1})_{1\leqslant i\leqslant m}$ ses coefficients. Alors, par définition du produit,

$$\forall i[\![1;m]\!], \qquad n_{i,1} = \sum_{k=1}^{m} m_{i,k}u_{k,1} = \sum_{k=1}^{m} m_{i,k}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall i[\![1;m]\!], \qquad n_{i,1} = \sum_{k=1}^{m} m_{i,k}.}$$

On suppose à nouveau que $m = 3$.

(a) On procède par récurrence, posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $A^n \in \mathcal{E}_3$ ».

Initialisation. Si $n = 0$, alors $A^n = A^0 = I_3$ donc comme vu à la question 19.a, $I_3 \in \mathcal{E}_3$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons donc $\mathscr{P}(n)$ i.e. $A^n \in \mathcal{E}_3$. Montrons que $A \in \mathcal{E}_3$ (cela revient en fait à montrer que $\mathscr{P}(1)$ est aussi vraie). On a les calculs suivants :

$$AU = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0\\ 0 & p & 1-p\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}p+1-p\\p+1-p\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = U.$$

Donc $A \in \mathcal{E}_3$. Or $A^n \in \mathcal{E}_3$. Donc par la propriété 19.b, on en déduit que $A \times A^n = A^{n+1} \in \mathcal{E}_3$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\; A^n \in \mathcal{E}_3.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question 16., on a $A^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc par la question précédente,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = U = A^n U = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^n + a_n + b_n \\ p^n + c_n \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 = p^n + a_n + b_n = p^n + c_n$ en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - p^n - a_n$. Or par la question 18.b, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = np^{n-1}(1-p)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = 1 - p^n - np^{n-1}(1-p)\,.}$$

Ce qui peut aussi s'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1 - p^n - np^{n-1} + np^n = 1 + (n-1)\,p^n - np^{n-1}$ et est donc cohérent avec la question 10.