Epreuve de mathématiques 5
2025-2026

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Analyse Asymptotique

Exercice A

1. Soient $h : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)} - \sqrt{1+2x}$ et $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\sin(x)} - \sqrt{1+2x}}{1-\cos(x)}$. Calculer le développement à l'ordre 3 en 0 de h et en déduire le développement à l'ordre 1 de f.
2. Soit $g : x \mapsto \sqrt{x^2+x^4}\tan\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(4 + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$. Déterminer si g admet une asymptote en $+\infty$ et si c'est le cas, déterminer la position relative de la courbe de g par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Problème B

Partie 1 : Construction de f

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$f_0(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre n de f_0 en 0^+.
4. Préciser le cas $n = 3$.
5. En déduire que f_0 est prolongeable par continuité en 0. On note alors f ce prolongement. Préciser $f(0)$.
6. Sans aucun calcul, peut-on affirmer en 0 que la fonction f est dérivable ? $\mathscr{C}^1$? $\mathscr{C}^n$?
7. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on précisera tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,(ax)\,\mathrm{e}^{bx}}{x}.$$

8. Retrouver alors le résultat de la question 4.

Partie 2 : Construction de φ

On donne

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

On admet que f est continue sur $\mathbb{R}$ et on donne

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit également pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$\varphi_0(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

9. Justifier avec soin que φ_0 est bien définie sur $]0;+\infty[$.

10. A l'aide d'un théorème du cours que l'on précisera, justifier que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser F'.
11. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de F.
12. Montrer que
$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, \quad \varphi_0(x) = F(2x) - F(x) + \ln(2).$$
13. En déduire un développement limité à l'ordre 4 de φ_0 en 0^+.
14. En déduire que φ_0 est prolongeable par continuité en 0. On note φ son prolongement.

Partie 3 : Etude de φ

15. Préciser, si elle existe, l'équation de la tangente au graphe de φ en 0 ainsi que la position du graphe de φ par rapport à sa tangente.
16. Justifier que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left]0;+\infty\right[$ et que
$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, \qquad \varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{x}.$$
17. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de φ'.
18. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de φ (et non de φ') en 1 en fonction de $\varphi(1)$ (que l'on ne calculera pas) ainsi que la position du graphe de φ par rapport à sa tangente au voisinage de 1.
19. Justifier que
$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, \ \forall t \in [x;2x], \qquad \frac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2x}.$$
20. En déduire que
$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, \ \varphi(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2}.$$
21. En déduire la limite de φ en $+\infty$ et préciser son comportement asymptotique en $+\infty$.
22. Dresser le tableau de variation complet de φ.
23. Justifier que φ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J que l'on précisera. On note $\psi = \varphi^{-1}$ sa réciproque.
24. Tracer l'allure du graphe de φ. On fera apparaitre la tangente en 0, sa position par rapport à cette tangente et son comportement asymptotique en $+\infty$. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie 4 : Etude de ψ

On admet dans la suite que ψ est $\mathscr{C}^\infty$ sur J.

25. Justifier qu'il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\psi(y) \underset{y \to \ln(2)}{=} a_0 + a_1\left(y - \ln(2)\right) + a_2\left(y - \ln(2)\right)^2 + o\left(\left(y - \ln(2)\right)^2\right).$$
26. En utilisant la relation $x = \psi(\phi(x))$ déterminer les valeurs de a_0, a_1 et a_2.
27. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de ψ en $\ln(2)$ et préciser la position de sa courbe par rapport à la tangente au voisinage de $\ln(2)$.

Problème 2 - Ensembles et applications

Soient E et F deux ensembles, $f \in \mathscr{F}(E, F)$. On pose alors

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A). \end{array}$$

1. Démontrer que f injective $\Rightarrow$ φ injective.
2. Démontrer la réciproque.
   Pour $x \in E$ et $y \in E$, on pourra considérer les singletons $\{x\}$ et $\{y\}$ et leurs images par φ.
3. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. On pose $A = f^{-1}(B)$.
   (a) Montrer que $f(A) \subseteq B$.
   (b) On suppose dans cette question que f est surjective. Montrer que $f(A) = B$.
4. Montrer que f surjective $\Leftrightarrow$ φ surjective.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit bijective et dans ce cas, préciser sans justification φ^{-1}.

Problème 3 - Continuité, dérivabilité et analyse asymptotique

On pourra admettre les résultats suivants :

Théorème 3.1 (Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que

- f est continue sur I,
- f est $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$,
- f' admet une limite dans $\mathbb{R}$ en a : $\lim\limits_{\subset x \to a x \neq a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors, la fonction f est $\mathscr{C}^1$ en a et donc sur I et de plus, $f'(a) = \ell$.

Théorème 3.2 (Théorème des accroissements finis)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$. On suppose que

- f est continue sur $[a; b]$,
- f est dérivable sur $]a; b[$.

Alors,

$$\exists c \in]a; b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On considère la fonction f définie par l'expression suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Dans tout le sujet, la notation $DL_p(a)$, où $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, signifie développement limité à l'ordre p en a.

Partie 1 : Un résultat de cours

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le $DL_{2n}(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. Retrouver alors le $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction $x \mapsto \arctan x$.

Partie 2 : Application du théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ et des accroissements finis

3. Montrer que la fonction f est continue en 0.
4. Etudier la parité de la fonction f, puis en déduire une restriction de son ensemble d'étude.
5. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
6. Montrer par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ que f est $\mathscr{C}^1$ en 0 et préciser $f'(0)$.
7. En utilisant la définition de la dérivabilité, montrer que f est dérivable en 0 et retrouver $f'(0)$.
8. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in \,]0;+\infty[$, il existe $c_x \in \,]0;x[$ tel que
$$\frac{\arctan(x)}{x} = \frac{1}{1+c_x^2}.$$
9. En déduire que
$$\forall x \in \,]0;+\infty[\,, \qquad \frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x. \qquad (\bigstar)$$

Partie 3 : Au voisinage de 0

10. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}$$
où $\varepsilon(x)$ désigne le signe de x.
11. En déduire un $DL_6(0)$ de la fonction $x \mapsto f(x) - \varepsilon(x)\dfrac{\pi}{2}x^2$, puis un équivalent de f en 0.
12. En déduire l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse 0, puis étudier leur position relative au voisinage de 0.

Partie 4 : Au voisinage de $+\infty$

13. Déterminer un développement asymptotique de la fonction f en $+\infty$ à la précision $\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)$.
14. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ (dont on précisera l'équation), puis leur position relative au voisinage de $+\infty$.
15. Sans aucun calcul, préciser le comportement asymptotique (présence ou non d'une asymptote, position relative) de la fonction f au voisinage de $-\infty$.
16. Déduire de $(\bigstar)$ la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ sur $\mathbb{R}$.

Partie 5 : Graphe de f et de f^{-1}

17. Déterminer les valeurs de $f(1)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{3})$ et $f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$.
18. A l'aide de $(\bigstar)$, déterminer le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
19. Tracer avec soin le graphe de la fonction f.
(On fera apparaitre asymptotes, tangentes déterminées précédemment entre autres).
20. Justifier avec soin que la fonction f est bijective, puis tracer sur le même graphe la courbe représentative $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ de la bijection réciproque de la fonction f.

Partie 6 : A propos de sa réciproque

On admet qu'il existe des coefficients réels a_0, a_1, b_1, b_2 tels que :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

21. Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction $\frac{1}{f}$ à la précision $\underset{+\infty}{\circ}(\frac{1}{x^2})$.
22. Sachant que $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en utilisant la question précédente, déterminer les coefficients a_1, a_0, b_1 et b_2 recherchés.
23. Les coefficients trouvés sont-ils compatibles avec le tracé de $\mathscr{C}_{f^{-1}}$?
24. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? *Justifier avec soin.*

$$(i)\ f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{b_1}{x} \qquad (ii)\ f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} a_1 x \qquad (iii)\ f^{-1}(x) \underset{+\infty}{\sim} a_1 x - \frac{50 b_1^2}{x}$$

Partie 7 : Asymptote de g

On considère la fonction g définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ par l'expression :

$$g(x) = x\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x$$

25. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de la fonction g.
26. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 3 de la fonction arctan, déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g en $+\infty$.

Partie 8 : Pour les plus rapides

On considère l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in]0, +\infty[$:

$$(E) \qquad 4xf\left(\frac{1}{2x}\right) + 9xf\left(\frac{1}{3x}\right) = \frac{\pi}{4x}.$$

27. Expliciter l'équation (E) à résoudre.
28. Résoudre (E) en justifiant avec soin.