Corrigé du Devoir Surveillé 5
Analyse asymptotique, ensembles et applications, continuité et dérivabilité

Problème I - Analyse asymptotique

Exercice A

1. On sait que $\sin(x) \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. De plus $\mathrm{e}^u \underset{u\to0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. On a alors les points suivants :

   - $u(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.
   - De plus,
   $$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to0}{=} x^2 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$
   - Puis, $u(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $u(x)^3 \underset{x\to0}{\sim} x^3$ i.e. $u(x) \underset{x\to0}{=} x^3 + o\left(x^3\right)$.
   - Enfin,
   $$o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to0}{=} o\left(x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to0}{=} o\left(x^3\right).$$

   Ainsi,
   $$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\sin(x)} &\underset{x\to0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right) \\ &\underset{x\to0}{=} 1 + x \qquad\qquad -\tfrac{x^3}{6} \quad +o\left(x^3\right) \\ &\qquad\qquad\quad +\tfrac{x^2}{2} \qquad\qquad +o\left(x^3\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +\tfrac{x^3}{6} \quad +o\left(x^3\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to0}{=} 1 + x \quad +\tfrac{x^2}{2} \qquad\qquad +o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

   De plus,
   $$\begin{aligned} \sqrt{1+2x} &\underset{x\to0}{=} 1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}(2x)^2 + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{6}(2x)^3 + o\left((2x)^3\right) \\ &\underset{x\to0}{=} 1 + x - \frac{1}{8}4x^2 + \frac{1}{16}8x^3 + o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

   Par différence,
   $$h(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)} - \sqrt{1+2x} \underset{x\to0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) - \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to0}{=} x^2 - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).$$

   Conclusion,
   $$\boxed{h(x) \underset{x\to0}{=} x^2 - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).}$$

D'autre part, $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$. Donc

$$1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$

Donc

$$f(x) = \frac{h(x)}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2 - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}{\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{2 - x + o\left(x\right)}{1 + o\left(x\right)}.$$

Posons $v(x) = o\left(x\right)$. Alors $v(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $o\left(v(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x\right)$. Or $\frac{1}{1+v} \underset{v\to 0}{=} 1 - v + o(v)$. Donc

$$\frac{1}{1+o(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - o(x) + o(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x).$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(2 - x + o\left(x\right)\right)\left(1 + o\left(x\right)\right) \underset{x\to 0}{=} 2 - x + o\left(x\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 2 - x + o\left(x\right).}$$

2. Soit $g : x \mapsto \sqrt{x^2+x^4}\tan\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(4 + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$. On note que pour tout $x > \frac{2}{\pi}$, on a $0 < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$ donc $\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ existe et $1 + \frac{1}{x} > 1$ donc $4 + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 4 > 0$ et $x^2 + x^4 > 0$ donc g est bien définie sur $\left]\frac{2}{\pi}; +\infty\right[$. Pour tout $x > \frac{2}{\pi}$, posons $h = \frac{1}{x}$. On a

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^4}}\tan\left(h\right) + \ln\left(4 + \arctan\left(h\right) + \ln\left(1+h\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{1+h^2}}{h^2}\tan\left(h\right) + \ln\left(4 + \arctan\left(h\right) + \ln\left(1+h\right)\right) \qquad \text{car } h^2 > 0. \end{aligned}$$

Or quand $h \to 0$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{1+h^2} &\underset{h\to 0}{=} 1 + \frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right) \\ \tan(h) &\underset{h\to 0}{=} h + \frac{h^3}{3} + o\left(h^2\right) \\ \arctan(h) &\underset{h\to 0}{=} h + o\left(h\right) \\ \ln\left(1+h\right) &\underset{h\to 0}{=} h + o\left(h\right) \end{aligned}$$

Donc d'une part,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^4}}\tan\left(h\right) &= \frac{\sqrt{1+h^2}}{h^2}\tan\left(h\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right)\left(h + \frac{h^3}{3} + o\left(h^2\right)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h^2}\begin{array}{lll}(h & +\frac{h^3}{3} & +o\left(h^2\right) \\ & +\frac{h^3}{2} & +o\left(h^3\right) \\ & & +o\left(h^3\right))\end{array} \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h^2}\begin{array}{lll}(h & +\frac{5h^3}{6} & +o\left(h^3\right))\end{array} \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h} + \frac{5h}{6} + o\left(h\right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\ln\left(4+\arctan\left(h\right)+\ln\left(1+h\right)\right) &\underset{h\to 0}{=} \ln\left(4+h+o\left(h\right)+h+o\left(h\right)\right)\\ &\underset{h\to 0}{=} \ln\left(4+2h+o\left(h\right)\right)\\ &\underset{h\to 0}{=} \ln\left(4\right)+\ln\left(1+\frac{h}{2}+o\left(h\right)\right).\end{aligned}$$

Posons $u(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{h}{2}+o\left(h\right)$. Alors,

- $u(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
- $o\left(u(h)\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(\frac{h}{2}+o\left(h\right)\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(h\right)$.

Or $\ln\left(1+u\right) \underset{u\to 0}{=} u+o\left(u\right)$. Donc

$$\ln\left(4+\arctan\left(h\right)+\ln\left(1+h\right)\right) \underset{h\to 0}{=} \ln\left(4\right)+\frac{h}{2}+o\left(h\right)+o\left(h\right) \underset{h\to 0}{=} \ln\left(4\right)+\frac{h}{2}+o\left(h\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}g(x) &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}+\frac{5h}{6}+o\left(h\right)+\ln\left(4\right)+\frac{h}{2}+o\left(h\right)\\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{h}+\ln(4)+\frac{8h}{6}+o\left(h\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} x+\ln(4)+\frac{4}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc la courbe représentative de g admet une asymptote en $+\infty$ d'équation

$$\boxed{y=x+\ln(4).}$$

De plus, on a $g(x)-(x+\ln(4)) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4}{3x}$ et pour tout $x>0$, $\frac{4}{3x}>0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Donc pour x assez grand, $g(x)-(x+\ln(4))>0$ et donc la courbe représentative de g est

$$\boxed{\text{au-dessus de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$$

Problème B

Partie 1 : Construction de f

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on pose

$$f_0(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. On sait que

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^{n+1}\right).$$

Donc

$$\mathrm{e}^x-1 \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^{n+1}\right).$$

Enfin,

$$f_0(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{k!} + o\left(x^n\right)$$

Posons $\tilde{k} = k-1$. Si $k=1$, $\tilde{k}=0$ et si $k=n+1$, alors $\tilde{k}=n$. D'où

$$f_0(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \frac{x^{\tilde{k}}}{(\tilde{k}+1)!} + o\left(x^n\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f_0(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k}}{(k+1)!} + o\left(x^n\right).}$$

4. Pour $n=3$, on a

$$f_0(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + o\left(x^3\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f_0(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right).}$$

5. Par la question précédente,

$$f_0(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^0}{1!} + o\left(1\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(1).$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f_(x) = 1$ et

$$\boxed{f_0 \text{ est bien prolongeable par continuité en } 0}$$

en posant pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x) = f_0(x)$ et $\boxed{f(0)=1}$.

6. Par la question 3. on a aussi

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^k}{(k+1)!} + o\left(x^n\right).$$

En particulier f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Donc

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0.}$$

Cependant $\boxed{\text{rien ne nous garantit a priori si } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ ou } \mathscr{C}^n \text{ ou non}}$.

7. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, par factorisation par l'angle moitié,

$$f(x) = f_0(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{x} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}.$$

Conclusion, en prenant $\boxed{a=b=1/2}$, on a bien

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x}.}$$

8. On sait que

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+\frac{\frac{x^2}{4}}{2}+\frac{\frac{x^3}{8}}{6}+o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{48}+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}+\frac{\frac{x^3}{8}}{6}+o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}+\frac{x^3}{48}+o\left(x^4\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{x} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{2}{x}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{48}+o\left(x^4\right)\right)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{48}+o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{x^2}{24}+o\left(x^3\right)\right)\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{48}+o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\tfrac{x}{2}+\tfrac{x^2}{8}+\tfrac{x^3}{48}+o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad +\tfrac{x^2}{24}+\tfrac{x^3}{48}+o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad +o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\tfrac{x}{2}+\tfrac{4x^2}{24}+\tfrac{2x^3}{48}+o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 4.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o\left(x^3\right).}$$

Partie 2 : Construction de φ

On donne

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0. \end{cases} \end{array}$$

On admet que f est continue sur $\mathbb{R}$ et on donne

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o\left(x^3\right).$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit également pour tout $x\in\,]0;+\infty[$,

$$\varphi_0(x)=\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

9. Soit $x\in\,]0;+\infty[$. Alors $[x;2x]\subset\mathbb{R}_+^*$. De plus $t\mapsto\frac{\mathrm{e}^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[x;2x]$. Donc

$$\varphi_0(x)=\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}$$

Ceci étant vrai pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, on en conclut que

$$\boxed{\varphi_0 \text{ est bien définie sur }]0;+\infty[.}$$

10. Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{par le théorème fondamental de l'analyse,}}$$

F existe, est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est une primitive de f de $\mathbb{R}$. Or f est continue donc

$$\boxed{F \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F' = f.}$$

11. Puisque $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right)$, par le théorème de primitivation du développement limité,

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{96} + o\left(x^4\right).$$

Or $F(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Conclusion,

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{96} + o\left(x^4\right).}$$

12. Soit $x \in]0;+\infty[$. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} + \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_x^{0} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{2x} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + \left[\ln\left(|t|\right)\right]_{t=x}^{t=2x} \qquad \text{par la relation de Chasles} \\
&= -\int_0^{x} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t + F\left(2x\right) + \ln\left(2x\right) - \ln(x) \qquad \text{car } x > 0 \\
&= -F(x) + F\left(2x\right) + \ln\left(\frac{2x}{x}\right) \\
&= F\left(2x\right) - F(x) + \ln(2).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\,, \quad \varphi_0(x) = F\left(2x\right) - F(x) + \ln(2).}$$

13. Par la 11.

$$\begin{aligned}
F(x) &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{96} + o\left(x^4\right) \\
F\left(2x\right) &\underset{x\to 0}{=} 2x + \frac{4x^2}{4} + \frac{8x^3}{18} + \frac{2^4x^4}{96} + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Donc par la question précédente,

$$\varphi_0(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{3x^2}{4} + \frac{7x^3}{18} + \frac{15x^4}{96} + o\left(x^4\right) + \ln(2).$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi_0(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + x + \frac{3x^2}{4} + \frac{7x^3}{18} + \frac{15x^4}{96} + o\left(x^4\right).}$$

14. Notamment, $\varphi_0(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + o(1)$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi_0(x) = \ln(2)$. Ainsi,

$$\boxed{\varphi_0 \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$$

en posant

$$\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \varphi_0(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \ln(2) & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Partie 3 : Etude de φ

15. Par la question 13. on a

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right).$$

Donc le graphe de φ admet une tangente en 0 d'équation

$$\boxed{y = \ln(2) + x.}$$

De plus,

$$\varphi(x) - (\ln(2) + x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3x^2}{4}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{3x^2}{4} \geqslant 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Donc au voisinage de 0, $\varphi(x) - (\ln(2) + x) \geqslant 0$ et

$$\boxed{\text{le graphe de } \varphi \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de } 0.}$$

16. Par les questions précédentes,

$$\forall x \in \left]0; +\infty\right[, \quad \varphi(x) = \varphi_0(x) = F(2x) - F(x) + \ln(2).$$

Or F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{\varphi \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0; +\infty[.}$$

De plus, pour tout $x \in]0; ; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\ &= 2f(2x) - f(x) \qquad \text{par la question 10.} \\ &= 2\frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1 - \mathrm{e}^{x} + 1}{x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{x}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0; +\infty\right[, \qquad \varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{x}.}$$

17. Posons $x=1+h$ i.e. $h=x-1$. Quand $x\to 1$, on a $h\to 0$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{x}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{2+2h}-\mathrm{e}^{1+h}}{1+h}\\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^{2h}-\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{h}\right)\left(1-h+h^2-h^3+o\left(h^3\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\mathrm{e}^2\left(1+2h+\frac{4h^2}{2}+\frac{8h^3}{6}+o\left(h^3\right)\right)-\mathrm{e}\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+o\left(h^3\right)\right)\right)\\
&\qquad\times\left(1-h+h^2-h^3+o\left(h^3\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+\left(2\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h+\frac{4\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{2}h^2+\frac{8\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{6}h^3+o\left(h^3\right)\right)\left(1-h+h^2-h^3+o\left(h^3\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \begin{array}[t]{lllll}
\mathrm{e}^2-\mathrm{e} & +\left(2\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h & +\frac{4\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{2}h^2 & +\frac{8\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{6}h^3 & +o\left(h^3\right)\\
 & -\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h & -\left(2\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h^2 & -\frac{4\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}}{2}h^3 & +o\left(h^3\right)\\
 & & +\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h^2 & +\left(2\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h^3 & +o\left(h^3\right)\\
 & & & -\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)h^3 & +o\left(h^3\right)\\
 & & & & +o\left(h^3\right)
\end{array}\\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^2-\mathrm{e}\quad +\mathrm{e}^2\,h\quad +\left(\mathrm{e}^2-\tfrac{\mathrm{e}}{2}\right)h^2\quad +\tfrac{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}}{3}h^3\quad +o\left(h^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi'(x)\underset{x\to 1}{=}\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2\,\mathrm{e}^2(x-1)+\left(\mathrm{e}^2-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)(x-1)^2+\frac{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}}{3}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right).}$$

18. Par la question précédente, φ' admet un développement limité à l'ordre 1 en 1 donné par

$$\varphi'(x)\underset{x\to 1}{=}\mathrm{e}^2-\mathrm{e}+2\,\mathrm{e}^2(x-1)+o(x-1).$$

Or φ est une primitive de φ sur $]0;+\infty[$ (voisinage de 1). Donc par le théorème de primitivation du développement limité :

$$\varphi(x)\underset{x\to 1}{=}\varphi(1)+\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)(x-1)+\mathrm{e}^2(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right).$$

On en déduit que le graphe de φ admet une tangente en 1 d'équation

$$\boxed{y=\varphi(1)+\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)(x-1).}$$

De plus,

$$\varphi(x)-\varphi(1)+\left(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}\right)(x-1)\underset{x\to 1}{\sim}\mathrm{e}^2(x-1)^2.$$

et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^2(x-1)^2\geqslant 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Donc le graphe de φ est au voisinage de 1,

$$\boxed{\text{au dessus de sa tangente.}}$$

19. Soit $x>0$ et $t\in[x;2x]$. Par croissance de l'intégrale, $\mathrm{e}^t\geqslant\mathrm{e}^x$. D'autre part $0<t\leqslant 2x$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, $\frac{1}{t}\geqslant\frac{1}{2x}$. Les termes étant positifs, par produit,

$$\boxed{\forall x\in\,]0;+\infty[\,,\ \forall t\in[x;2x]\,,\qquad \frac{\mathrm{e}^t}{t}\geqslant\frac{\mathrm{e}^x}{2x}.}$$

20. Soit $x \in]0;+\infty[$. Alors $2x \geqslant x$ **(important !)**. Donc par la question précédente et la croissance de l'intégrale, on a

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^x}{2x}\,\mathrm{d}t \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2x}\int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^x}{2x} \times (2x - x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\,,\ \varphi(x) \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2}.}$$

21. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} = +\infty$. Donc par la question précédente et le théorème de minoration,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$

De plus, toujours par la question précédente, pour tout $x > 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{2x}$. Or par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x} = +\infty$. Par le théorème de minoration,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le graphe de } \varphi \text{ présente une branche parabolique verticale en } +\infty.}$$

22. On sait que φ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{x}$. La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $x < 2x \ \Rightarrow\ \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^{2x}$. Donc

$$\forall x \in]0;+\infty[\,, \quad \varphi'(x) > 0.$$

Donc la fonction φ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Or φ est continue en 0. Donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, $\varphi(0) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. Conclusion,

x	0		$+\infty$
g	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

23. Par ce qui précède,

- La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,
- $\mathbb{R}_+$ est un intervalle.

Donc par le théorème de la bijection, φ définit une bijection de φ dans $\varphi(\mathbb{R}_+)$ et de plus, $J = \varphi(\mathbb{R}_+) = \left[\varphi(0); \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)\right[= [\ln(2);+\infty[$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ définit une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ dans } J = [\ln(2);+\infty[.}$$

On note $\psi = \varphi^{-1}$ sa réciproque.

24. DESSIN !!!

Partie 4 : Etude de ψ

On admet dans la suite que ψ est $\mathscr{C}^\infty$ sur J.

25. Puisque ψ est $\mathscr{C}^\infty$ sur J, ψ est $\mathscr{C}^2$ sur J donc notamment en $\ln(2) \in J$. Donc par le théorème de Taylor-Young, ψ admet un développement limité à l'ordre 2 en $\ln(2)$:

$$\boxed{\exists\,(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3, \quad \psi(y) \underset{y \to \ln(2)}{=} a_0 + a_1\,(y - \ln(2)) + a_2\,(y - \ln(2))^2 + o\left((y - \ln(2))^2\right).}$$

26. On sait par la question 13.
$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{=} \ln(2) + x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right).$$
Donc
$$x \underset{x \to 0}{=} \psi\left(\ln(2) + x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right)\right).$$
Posons $y(x) \underset{x \to 0}{=} \ln(2) + x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right)$. Dès lors $y(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \ln(2)$. Donc par la question précédente,
$$x \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1\,(y(x) - \ln(2)) + a_2\,(y(x) - \ln(2))^2 + o\left((y(x) - \ln(2))^2\right).$$
Ou encore, en posant $u(x) \underset{x \to 0}{=} y(x) - \ln(2) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right)$,
$$x \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 u(x) + a_2 u(x)^2 + o\left(u(x)^2\right).$$
Calculons :
   - $u(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$,
   - puis,
$$u(x)^2 \underset{x \to 0}{=} \left(x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right)\right)\left(x + \frac{3x^2}{4} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x \to 0}{=} x^2 + o\left(x^2\right).$$
   - Enfin,
$$o\left(u(x)^2\right) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2 + o\left(x^2\right)\right) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right).$$

   Ainsi,
$$\begin{aligned} x &\underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 u(x) + a_2 u(x)^2 + o\left(u(x)^2\right) \\ &\underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x \quad + a_1 \tfrac{3x^2}{4} \quad + o\left(x^2\right) \\ &\qquad\qquad\qquad + a_2 x^2 \quad + o\left(x^2\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + o\left(x^2\right) \\ &\underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + \left(\frac{3a_1}{4} + a_2\right) x^2 + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$
   Par unicité du développement limité,
$$\begin{cases} 0 &= a_0 \\ 1 &= a_1 \\ 0 &= \frac{3a_1}{4} + a_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= -\frac{3a_1}{4} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$
   Conclusion,
$$\boxed{a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = -\frac{3}{4}.}$$

27. Par la question précédente,

$$\psi(y) \underset{y\to\ln(2)}{=} (y-\ln(2)) - \frac{3}{4}(y-\ln(2))^2 + o\left((y-\ln(2))^2\right).$$

Donc la courbe représentative de ψ admet une tangente en $\ln(2)$ d'équation

$$\boxed{y = x - \ln(2).}$$

De plus, on a

$$\psi(y) - (y-\ln(2)) \underset{y\to\ln(2)}{\sim} -\frac{3}{4}(y-\ln(2))^2.$$

et pour tout $y \geqslant 2$, $-\frac{3}{4}(y-\ln(2))^2 \leqslant 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Donc la courbe représentative de ψ se trouve

$$\boxed{\text{en dessous de sa tangente au voisinage de } \ln(2).}$$

Problème II - Ensembles et Applications

Soient E et F deux ensembles, $f \in \mathscr{F}(E,F)$. On pose alors

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A). \end{array}$$

1. On suppose f injective. Montrons que φ est injective. Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $\varphi(A) = \varphi(B)$ i.e.

$$f(A) = f(B).$$

Montrons que $A = B$. Soit $x \in A$. Alors, $f(x) \in f(A) = f(B)$. Donc $f(x) \in f(B)$. Donc il existe $y \in B$ tel que $f(x) = f(y)$ *(attention, a priori y n'est pas x)*. Or la fonction f est injective donc $x = y \in B$. Donc si $x \in A$ alors $x \in B$. Ainsi,

$$A \subset B.$$

Or par symétrie des hypothèses sur A et B, on démontre de même que $B \subset A$. Donc $A = B$. Donc φ est bien injective. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ injective} \quad \Rightarrow \quad \varphi \text{ injective.}}$$

2. Montrons que φ injective $\Rightarrow$ f injective. Supposons φ injective. Montrons que f est injective. Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$. Alors,

$$\varphi(X) = f(\{x\}).$$

Par définition de l'ensemble image, $f(\{x\})$ est l'ensemble de toutes les images possibles lorsque la variable varie dans $\{x\}$ i.e. est égale à x et donc seule $f(x)$ est possible comme image. Donc

$$\varphi(X) = f(\{x\}) = \{f(x)\}.$$

De même

$$\varphi(Y) = f(\{y\}) = \{f(y)\}.$$

Or $f(x) = f(y)$ donc $\{f(x)\} = \{f(y)\}$. Ainsi,

$$\varphi(X) = \varphi(Y).$$

Or φ est injective. Donc $X = Y$ i.e. $\{x\} = \{y\}$. Donc $x = y$. Donc f est bien injective. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ injective} \quad \Rightarrow \quad f \text{ injective.}}$$

3. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. On pose $A = f^{-1}(B)$.

   (a) Montrons que $f(A) \subset B$. Soit $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Or $A = f^{-1}(B)$. Donc $x \in f^{-1}(B)$ i.e. $f(x) \in B$. Donc $y = f(x) \in B$. Ceci étant vrai pour y quelconque dans $f(A)$. On conclut que
   $$\boxed{f(A) \subset B.}$$

   (b) On suppose dans cette question que f est surjective. Montrons que $f(A) = B$. On sait déjà que $f(A) \subset B$ donc montrons que $B \subset f(A)$. Soit $y \in B \subset F$. Or f est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B) = A$. Donc on a $y = f(x)$ et $x \in A$. Donc $y \in f(A)$. Ceci étant vrai pour y quelconque dans B, on en déduit que
   $$B \subset f(A).$$
   Conclusion, à l'aide de la question précédente,
   $$\boxed{f(A) = B.}$$

4. Supposons f surjective. Montrons que φ est surjective. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Posons $A = f^{-1}(B)$. Alors, puisque f est surjective, par la question précédente, $B = f(A) = \varphi(A)$. Donc B admet bien un antécédent par φ. Ceci étant vrai pour B quelconque dans $\mathscr{P}(F)$. On en déduit que φ est surjective. D'où
   $$f \text{ surjective} \quad \Rightarrow \quad \varphi \text{ surjective.}$$
   Réciproquement, supposons φ surjective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Montrons que y possède un antécédent par f. Posons $Y = \{y\} \in \mathscr{P}(F)$. Or φ est surjective, donc il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $\varphi(X) = Y$ i.e. $f(X) = Y$. Supposons $X = \emptyset$. Alors $Y = f(\emptyset) = \emptyset$. Contradiction (car $y \in Y$). Donc $X \neq \emptyset$. Soit $x \in X$. Alors $f(x) \in f(X) = Y$. Donc $f(x) \in \{y\}$. Nécessairement, $f(x) = y$. Donc y a bien un antécédent par f. Ceci étant vrai pour $y \in F$ quelconque, on en déduit que
   $$\varphi \text{ surjective} \quad \Rightarrow \quad f \text{ surjective.}$$
   Conclusion,
   $$\boxed{f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ surjective.}}$$

5. Par les questions 1. et 2., on a
   $$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ injective.}$$
   Or par la question précédente, on a aussi f surjective $\Leftrightarrow$ φ surjective. D'où
   $$f \text{ bjective} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi \text{ injective} \\ \varphi \text{ surjective} \end{cases} \quad \varphi \text{ bijective.}$$
   Conclusion,
   $$f \text{ bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ bijective.}$$
   Dans ce cas, on peut montrer que
   $$\boxed{\varphi^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(F) & \to & \mathscr{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B). \end{array}}$$

Problème III - Continuité-dérivabilité et analyse asymptotique

On considère la fonction f définie par l'expression suivante :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Dans tout le sujet, la notation $DL_p(a)$, où $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, signifie développement limité à l'ordre p en a.

Partie 1 : Un résultat de cours

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On a les égalités suivantes :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}).}$$

2. Par le théorème de primitivation du développement limité, on en déduit de la question précédente que

$$\arctan x \underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Or $\arctan(0) = 0$, ce qui permet d'en déduire que

$$\boxed{\arctan x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).}$$

Partie 2 : Application du théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ et des accroissements finis

3. Montrons que la fonction f est continue en 0 i.e. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ i.e. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Sachant que $\arctan(\frac{1}{x}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $x^2 \geqslant 0$, on a l'encadrement suivant :

$$\underbrace{-\frac{\pi}{2}x^2}_{\underset{x\to 0}{\to} 0} \leqslant f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \underbrace{\frac{\pi}{2}x^2}_{\underset{x\to 0}{\to} 0}$$

On a $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\pi}{2}x^2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\pi}{2}x^2 = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, il vient que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$$

4. Montrons que f est impaire i.e. $\begin{cases} \forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f & (i) \quad \checkmark \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) & (ii) \end{cases}$.

$\boxed{(ii)}$ Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Sachant que la fonction arctan est impaire, on a les égalités entre réels suivantes :

$$f(-x) = (-x)^2 \arctan\left(\frac{1}{-x}\right) = -f(x)$$

De plus $f(0) = 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = f(x).$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire}}$, et sa courbe représentative est alors symétrique par rapport à l'origine.

$$\boxed{\text{On peut alors restreindre son étude à l'ensemble } \mathbb{R}_*^+ \text{ par exemple.}}$$

5. La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, la fonction $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$$

Conclusion

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}.}$$

6. On observe les points suivants :

(i) La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions qui le sont.

(ii) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (notamment en 0 grâce à la question 3.)

(iii) De même que dans la question 3., on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad 0 \leqslant \left|2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 2\,|x|\,\frac{\pi}{2} = \pi x.$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \pi x = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left|2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 0$. Donc par différence, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) \text{ existe et vaut } 0.$$

On en conclut que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$$

7. Pour montrer que f est dérivable en 0 par la définition de la dérivabilité, on doit montrer que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ admet une limite quand $x \to 0$. Calculons,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$0 \leqslant \left|x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|\,.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left|x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et vaut 0. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0)=0.}$$

Ce résultat est parfaitement cohérent avec la question précédente où l'on a établi que f est $\mathscr{C}^1$ et donc dérivable en 0 et on avait bien trouvé $f'(0)=0$.

8. Soit $x \in \left]0;+\infty\right[$. On observe les points suivants :

   (i) la fonction arctan est continue sur $[0;x]$,

   (ii) la fonction arctan est dérivable sur $]0;x[$ car $x>0$.

   Donc par le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]0;x[$ tel que

$$\frac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0} = \arctan'(c_x) = \frac{1}{1+c_x^2}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ \exists c_x \in]0;x[,\quad \frac{\arctan(x)}{x} = \frac{1}{1+c_x^2}.}$$

9. Soit $x \in \left]0;+\infty\right[$. Avec les notations de la question précédente, on a $0<c_x<x$ donc par la stricte croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, $0<c_x^2<x^2$. D'où par la stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c_x^2} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c_x^2} < x \qquad \text{car } x>0.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\qquad \frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x. \qquad (\bigstar)}$$

Partie 3 : Au voisinage de 0

10. Montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\quad \underbrace{\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}_{h(x)} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \quad (i) \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \quad (ii) \end{cases}$$

   $\boxed{(i)}$ La fonction h ainsi définie est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et :

$$\forall x>0,\quad h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

   Sachant qu'une fonction nulle sur un **intervalle** y est constante, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x>0,\quad h(x)=\lambda$$

   C'est en particulier vrai pour $x=1>0$, ce qui permet de trouver :

$$h(1)=\lambda \iff \arctan(1)+\arctan(1)=\lambda \iff \lambda = \frac{\pi}{2}$$

   Ainsi, on a bien montré que pour tout $x>0$, $\arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{(ii)}$ On remarque que la fonction h introduite est impaire, ce qui permet d'en déduire :

$$\forall x < 0, \quad h(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}.}$$

11. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) - \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 &= x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 = x^2\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -x^2 \arctan x \qquad \text{par la question précédente.} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} f(x) = \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - x^2 \arctan x &\underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - x^2\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - x^3 + \frac{x^5}{3} + o(x^6). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 - x^3 + \frac{x^5}{3} + o(x^6).}$$

Par troncature à l'ordre 2,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 + o(x^2).$$

Autrement dit,

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2.}$$

12. D'après la question précédente :

$$f(x) - [ax + b] \underset{x\to 0}{\sim} \varepsilon(x)\frac{\pi}{2}x^2 \qquad \text{avec } a = b = 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'équation de la tangente } \mathcal{T}_0 \text{ est } y = 0.}$
Sachant que l'équivalent est strictement positif si et seulement si $x > 0$, on en déduit qu'au voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{T}_0$ à gauche de 0 et lui est au-dessus à droite de 0.

Partie 4 : Au voisinage de $+\infty$

13. Puisque $u = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &\underset{x\to+\infty}{=} x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \frac{1}{5x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \frac{1}{5x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).}$$

14. D'après la question précédente :

$$f(x) - x \underset{x \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{3x} < 0 \quad \text{(au voisinage de } +\infty)$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote oblique en } +\infty \text{ d'équation } y = x}$. Sachant que $-\dfrac{1}{3x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$

15. La fonction f étant impaire, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote oblique en } -\infty \text{ d'équation } y = x}$,
et $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de son asymptote au voisinage de } -\infty.}$

16. D'après ($\bigstar$), on a

$$\forall y \in]0, +\infty[, \ \arctan(y) < y.$$

Soit $x \in]0, +\infty[$. Alors l'inégalité ($\bigstar$) étant vraie pour tout $y \in]0, +\infty[$, elle est en particulier vraie pour $y = \frac{1}{x} \underset{\text{ok !}}{>} 0$, ce qui permet d'en déduire que :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \underset{x^2>0}{\Longleftrightarrow} x^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) < x \Longleftrightarrow f(x) < x$$

Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est strictement en-dessous de son asymptote sur } \mathbb{R}_*^+}$, et par imparité $\boxed{\text{est strictement au-dessus sur } \mathbb{R}_*^-}$ et les deux courbes s'intersectent au point d'abscisse $x = 0$.

Partie 5 : Graphe de f et de f^{-1}

17. Après calculs, $\boxed{f(1) = \frac{\pi}{4},\ f(-1) \underset{\text{imparité}}{=} -f(1) = -\frac{\pi}{4},\ f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{9}.}$

18. Soit $y \in]0; +\infty[$. On sait par ($\bigstar$) que $\frac{y}{1+y^2} < \arctan(y)$. De plus $\arctan(y) > 0$. Donc

$$\forall y \in]0, +\infty[, \quad \frac{y}{1+y^2} < 2\arctan(y).$$

Etudions maintenant le signe de la dérivée de f.

Soit $x \in]0, +\infty[$. L'inégalité précédente étant vraie pour tout $y \in]0, +\infty[$, elle est en particulier vraie pour $y = \frac{1}{x} \underset{\text{ok !}}{\in}]0, +\infty[$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} < 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \Longleftrightarrow \frac{x}{1+x^2} < 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x>0}{\Longleftrightarrow} \frac{x^2}{1+x^2} < 2x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, pour tout $x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) > 0$.

Remarque : f' est paire, donc on pourrait même conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$.

On en déduit les tableaux de signes et variations suivants :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Concernant les limites, rappelons que d'après la question 13. :

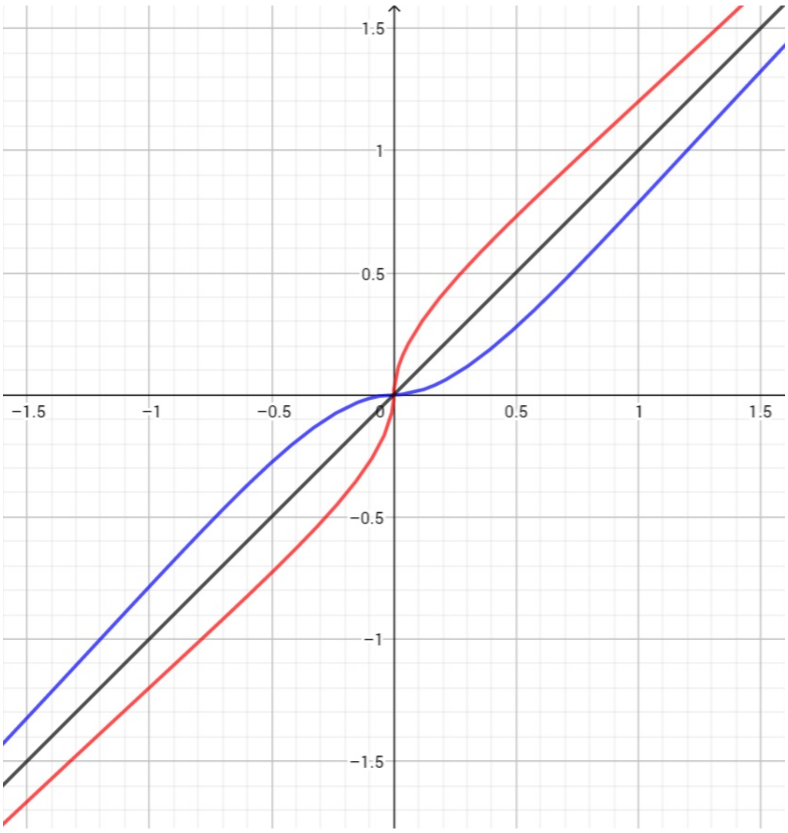
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

ce qui permet d'en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. La limite en $-\infty$ s'en déduit par imparité de la fonction f. Conclusion,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

19. Cf question suivante.

20. La fonction f est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ et y est strictement croissante, donc réalise une bijection de I vers $f(I) = \mathbb{R}$. Ainsi, la bijection réciproque f^{-1} existe et sa courbe représentative $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ **(en rouge)** s'obtient par symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$ **(en bleu)** par rapport à la droite d'équation $y = x$ **(en noir)**.



Partie 6 : A propos de sa réciproque

On admet qu'il existe des coefficients réels a_0, a_1, b_1, b_2 tels que :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

21. D'après la question 13. on a

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \frac{1}{5x^3} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Par conséquent, on a l'égalité asymptotique entre fonctions suivantes :

$$\frac{1}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\frac{1}{1+o\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Or, $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o(u)$. Posons $u \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. On a alors $o(u) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc, on a les égalités asymptotiques entre fonctions suivantes :

$$\boxed{\frac{1}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).}$$

22. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = f(x)$. D'après la question 13. on sait que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et que donc notamment $y = f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, on a les égalités asymptotiques entre fonctions suivantes :

$$x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) \underset{x\to+\infty}{=} a_1 y + a_0 + \frac{b_1}{y} + \frac{b_2}{y^2} + o\left(\frac{1}{y^2}\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} a_1 y + a_0 + \frac{b_1}{f(x)} + \frac{b_2}{f(x)^2} + o\left(\frac{1}{f(x)^2}\right).$$

Or nous avons vu que $\frac{1}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ dont on déduit également que $\frac{1}{f(x)^2} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $o\left(\frac{1}{f(x)^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. D'où,

$$x \underset{x\to+\infty}{=} a_1 f(x) + a_0 + b_1\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + b_2\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En utilisant la question 13. on obtient alors

$$x \underset{x\to+\infty}{=} a_1\left(x - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + a_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} a_1 x + a_0 - \frac{b_1 - 3a_1}{3x} + \frac{b_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Autrement dit

$$(a_1 - 1)x + a_0 - \frac{b_1 - 3a_1}{3x} + \frac{b_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 0.$$

ce qui n'est possible que si $a_1 - 1 = a_0 = b_1 - 3a_1 = b_2 = 0$ (sinon on obtient 0 équivalent à un terme non nul ce que l'on sait faux bien entendu). Par conséquent

$$\boxed{a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad b_1 = 3a_1 = 3, \qquad b_2 = 0.}$$

On conclut que

$$\boxed{f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).}$$

23. On retrouve bien d'une part que $\mathscr{C}_f^{-1}$ admet la droite $y = x$ pour asymptote oblique en $+\infty$ (et donc en $-\infty$ par imparité, question 4.). D'autre part puisque

$$f^{-1}(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{x}.$$

et que $\frac{3}{x} > 0$ si et seulement si $x > 0$, on retrouve également le fait que $\mathscr{C}_f^{-1}$ est asymptotiquement au-dessus de la droite $y = x$ en $+\infty$ et asymptotiquement en-dessous de la droite $y = x$ en $-\infty$.

24. (i) On a $\frac{b_1}{x} = \frac{3}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$ et $f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Donc $\frac{b_1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(f^{-1}(x)\right)$ et donc

$$\boxed{f^{-1}(x) \text{ n'est pas équivalent à } \frac{b_1}{x} \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

(ii) De la question 22. et du fait que $o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{3}{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} x = a_1 x$, on en déduit directement que $\boxed{f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_1 x}$.

(iii) Puisque $\frac{50b_1^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} a_1 x = x$, on en déduit que $\boxed{a_1 x + \frac{50b_1^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} a_1 x \underset{x\to+\infty}{\sim} f^{-1}(x)}$, d'après le point (ii).

Partie 7 : Asymptote de g

On considère la fonction g définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ par l'expression :

$$g(x) = x\left(\frac{f(x)}{x}\right)^x$$

25. Par définition, pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, $g(x) = x\,\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{f(x)}{x}\right)}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors les équivalences suivantes :

$$x \in \mathscr{D}_g \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \mathscr{D}_f \\ x \neq 0 \\ \frac{f(x)}{x} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}.$$

Or pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ et pour tout $x < 0$, $f(x) < 0$ d'après la question 18. On en déduit donc que $\boxed{\mathscr{D}_g = \mathbb{R}^*}$.

26. D'après la question 2, on a

$$\arctan(u) \underset{x\to+\infty}{=} u - \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g(x) = x\,\mathrm{e}^{x\ln\left(x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} &\underset{x\to+\infty}{=} x\,\mathrm{e}^{x\ln\left(x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\,\mathrm{e}^{x\ln\left(1-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Posons $u \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $o(u) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or $\ln(1+u) \underset{u\to0}{=} u + o(u)$. Donc

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\,\mathrm{e}^{x\left(-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} \underset{x\to+\infty}{=} x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Posons $v \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De même que précédemment, on a $o(v) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$. De plus $\mathrm{e}^v \underset{v\to0}{=} 1 + v + o(v)$. Donc,

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x - \frac{1}{3} + o(1).$$

$\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{C}_g \text{ possède une asymptote oblique en } +\infty \text{ d'équation } y = x - \frac{1}{3}.}$

Partie 8 : Pour les plus rapides

27. Soit $x \in]0;+\infty[$, par définition de f, on a

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad 4x\left(\frac{1}{(2x)^2}\arctan(2x)\right)+9x\left(\frac{1}{(3x)^2}\arctan(3x)\right)=\frac{\pi}{4x}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}\arctan(2x)+\frac{1}{x}\arctan(3x)=\frac{\pi}{4x}\\
&\boxed{(E) \quad \Leftrightarrow \quad \arctan(2x)+\arctan(3x)=\frac{\pi}{4}} \qquad \text{car } x\neq 0.
\end{aligned}$$

28. Soit $x \in]0;+\infty[$, puisque $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on peut composer l'équation (E) par la fonction tangente :

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \tan\left(\arctan(2x)+\arctan(3x)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \arctan(2x)+\arctan(3x)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $\arctan(2x)\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan(3x)\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, donc on peut utiliser la formule $\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ et le fait que $\tan(\arctan(u))=u$ pour tout $u\in\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\tan(\arctan(2x))+\tan(\arctan(3x))}{1-\tan(\arctan(2x))\tan(\arctan(3x))}=1 \\ \arctan(2x)+\arctan(3x)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{2x+3x}{1-6x^2}=1 \\ \arctan(2x)+\arctan(3x)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x=1-6x^2 \\ 1-6x^2\neq 0 \\ \arctan(2x)+\arctan(3x)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x^2+5x-1=0 \\ x^2\neq\frac{1}{6}. \\ \arctan(2x)+\arctan(3x)\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé à $6x^2+5x-1$, on a

$$\Delta=25+26=49=7^2>0.$$

Alors les racines sont

$$x=\frac{-5-7}{12}=-1 \quad \text{OU} \quad x=\frac{-5+7}{12}=\frac{1}{6}.$$

Puisque $x>0$, il va de soi que $x\neq -1$. Donc $x=\frac{1}{6}$ est l'unique racine possible. Dans ce cas, on a bien $x^2\neq\frac{1}{6}$, et $2x=\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{3}}$ ainsi que $3x=\frac{1}{2}<1$ Par conséquent, on a bien $0<\arctan(2x)+\arctan(3x)<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{x=\frac{1}{6} \text{ est l'unique solution de } (E).}$$