Commentaires du DS6
continuité-dérivabilité, suites, polynômes

Index des raccourcis :

- AE : à encadrer
- NJ : non justifié
- PC : pas clair
- PK : pourquoi ?

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{70}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1.4	P1	P2.1	P2.2	P2.3	P2	P3.1	P3.2	P3.3	P3.4	P3	Total	Note finale
Moyenne	-2	6,9	2,2	1	0,1	10,2	2,4	5,3	0,3	8	5,9	1,5	0,1	0	7,6	23,8	8,19
Sur		14	13	13	17	57	11	19	11	41	12	12	12	12	48	146	20

TOTAL : 146 pt

Problème I - Polynômes 57 pt

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence par $P_1 = X - 1$ et

$$\forall n \geqslant 1, \qquad P_{n+1} = P_n + (n+1)\, X^n\, (X-1)\,.$$

Partie 1 : Cas $n = 2$ et $n = 3$ 14 pt

1. **3 pt** Calculer P_2 et préciser sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

   Deux trois erreurs sur l'exposant X^n remplacé par X^2 au lieu de X^3 sinon de bonnes réponses. Notez que la question est en deux partie : il faut commencer par calculer P_2 puis on le factorise. Attention au coefficient dominant, ne pas écrire $(X-1)\left(X+\frac{1}{2}\right)$ mais $2\,(X-1)\left(X+\frac{1}{2}\right)$.

2. **3 pt** Calculer P_3 et préciser sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

   Même remarque que pour P_2. Plusieurs ne précisent pas que $3X^2+2X+1$ est irréductible (discriminant négatif) pour justifier que la factorisation est complète dans $\mathbb{R}[X]$.

3. **3 pt** On note $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Déterminer la factorisation de P_3 dans $\mathbb{C}$ et vérifier que les racines de P_3 appartiennent à $\mathcal{D} \cup \{1\}$.

   Bien globalement, là aussi n'oubliez pas le coefficient dominant 3 dans la factorisation : $3\,(X-1)\left(X+\frac{1+\sqrt{2}i}{3}\right)\left(X\right.$

4. On considère l'équation polynomiale suivante $(E) \quad : \quad P'\left(X^2\right) = 2P + 2X + 1$, d'inconnu $P \in \mathbb{R}[X]$.

   (a) **2 pt** Vérifier que P_2 est une solution de (E).

   Ceux qui se sont trompés dans le calcul de P_2 auraient dû s'en rendre compte ici. Des confusions entre $P_2'\left(X^2\right)$ et $P_2\left(X^2\right)'$. Globalement bien réussie.

   (b) **3 pt** Déterminer toutes les solutions de (E).

   Un nombre satisfaisant de belles réponses. Attention $\deg(2P+2X+1) = \deg(P)$ que lorsque $\deg(P) > \deg(2X+1) = 1$.

Partie 2 : Détermination des P_n 13 pt

5. 2 pt Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le degré de P_n et α_n son coefficient dominant.

   Bien plus de confusions sur cette question. Il était relativement simple de trouver les formules à partir des premiers P_n (P_1, P_2, etc) mais une récurrence était nécessaire pour l'établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Plusieurs sont partis en posant $\deg(P_n) = n$. Ne supposez pas le résultat que vous souhaitez démontrer ! De plus si $\deg(P_n) = m$, alors $\deg(P_{n+1})$ n'est pas nécessairement $m+1$ (on pourrait par exemple avoir une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui auraient tous le même degré). Quelques bonnes réponses.

6. 2 pt Montrer que les P_n possèdent une racine commune que l'on précisera.

   Même principe, on intuite par les premiers termes que 1 est la racine commune puis on le démontre par récurrence. Je précise que plusieurs d'entre vous ne savent toujours pas rédiger proprement une récurrence.

7. 2 pt Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;+\infty[$, $P_n(x) > 0$.

   Moins de tentatives mais encore quelques bonnes réponses. Ou bien par une troisième récurrence ou bien en montrant qu'à $x > 1$ fixé, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Attention à ne pas confondre x et X, l'un est un réel l'autre l'indéterminé des polynômes. Par exemple $X > 1$ n'a aucun sens le polynôme X n'est pas plus grand que le polynôme constant 1 (pas d'inégalité dans les polynômes).

8. 2 pt Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\, X^k\, (X-1) = P_n - P_1.$$

   Aucune bonne réponse, il fallait écrire $P_{k+1} - P_k = (k+1)\, X^k\, (X-1)$ et sommer en reconnaissant une somme télescopique. A reprendre avec le corrigé.

9. 2 pt Soit $n \geqslant 1$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)\, X^{k+1} - kX^k\right]$.

   Encore du télescopage. Une ou deux bonnes réponses directes. D'autres y sont parvenus en découpant et en faisant un glissement d'indice (cela redémontre le résultat sur le télescopage).

10. 3 pt En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $P_n = nX^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

    Plusieurs bonnes réponses mais assez peu. Attention en utilisant la question 8. il faut traiter le cas $n = 1$ à part (personne ne l'a vu).

Partie 3 : Multiplicité des racines 13 pt

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q_n = (X-1)\, P_n$

11. 2 pt Simplifier $(X-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

    Encore du télescopage. Une ou deux bonnes réponses seulement.

12. 2 pt En déduire l'expression développée de Q_n puis de Q_n'.

    Très peu de bonnes réponses car il fallait avoir réussi la question précédente.

13. 2 pt Déterminer les racines de Q_n' et leurs multiplicités.

    Non réussie.

14. **3 pt** En déduire que 1 est l'unique racine multiple (de multiplicité strictement plus grande que 1) de Q_n et préciser sa multiplicité.
    Non réussie.

15. **2 pt** Montrer que P_n ne possède que des racines simples.
    Non réussie.

16. **2 pt** Combien de racines distinctes (réelles ou complexes) possède P_n ?
    Non réussie. Un seul d'entre vous à pensé à citer le résultat que P_n possède autant de racines comptées avec multiplicité que son degré.

Partie 4 : Localisation des racines **17 pt**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

17. **2 pt** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Montrer que $\left|\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| < n\,|z|^n$.
    Non réussie.

18. **2 pt** En déduire que P_n n'a pas de racine dont le module est strictement plus grand que 1.
    Non traitée.

19. **2 pt** Soit $z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$ une racine n-ième de l'unité différente de 1. Montrer que z n'est pas racine de P_n.
    Non traitée.

20. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$ et $|z| = 1$.
    (a) **2 pt** Dessiner $\mathcal{D}_2 = \{\, z' \in \mathbb{C} \mid |z' + 1| < 2\,\}$.
    Facile mais une seule bonne réponse.
    (b) **2 pt** Développer et simplifier $|z+1|^2$.
    Non réussie.
    (c) **2 pt** En déduire que $z \in \mathcal{D}_2$.
    Non traitée.
    (d) **3 pt** Montrer que z n'est pas racine de P_n.
    Non traitée.

21. **2 pt** Déterminer toutes les racines de P_n ayant un module supérieur ou égal à 1.

Problème II - Suites **41 pt**

Partie 1 : La série harmonique **11 pt**

On appelle série harmonique la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **3 pt** Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et minorée par 1.
   Question facile et bien traitée par les 2/3 de la classe mais de grosses difficultés pour un nombre encore trop important d'entre vous.

2. $\boxed{1\ \text{pt}}$ Rappeler l'identité des accroissements finis.

   1/3 seulement de réponses correctes. Je ne vois pas comment on peut envisager de passer les concours sans connaître les éléments les plus élémentaires du cours...

3. $\boxed{3\ \text{pt}}$ En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, on a

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln\left(\frac{k}{k-1}\right).$$

   Aucune bonne réponse.

4. $\boxed{2\ \text{pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

   Une ou deux réponses complètes seulement. Pourtant, sans être complètement facile, la question n'est pas si difficile que cela.

5. $\boxed{2\ \text{pt}}$ Déterminer la limite de $\left(\frac{H_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ en déduire un équivalent et la limite de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   Un massacre, pourquoi ne pas appliquer simplement le théorème d'encadrement à l'aide de la question précédente ? Question très facile mais peu traitée.

Partie 2 : Une suite implicite $\boxed{19\ \text{pt}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f_n(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{nx}.$$

6. $\boxed{2\ \text{pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n admet une unique valeur d'annulation noté u_n.

   Beaucoup de réponses très approximative. Vous oubliez souvent l'hypothèse de continuité ou de changement de signe. Vous parachutez $f\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}$ avant d'appliquer le théorème ce qui n'est pas logique. Questions traitée mille fois depuis le début de l'année, c'est très choquant qu'elle ne soit pas résolue par tout le monde.

7. $\boxed{2\ \text{pt}}$ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < u_n < \frac{1}{n}.$$

   Un nombre raisonnable de bonnes réponses bien que la rédaction soit parfois un peu fragile.

8. $\boxed{2\ \text{pt}}$ En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

   Question très facile et... franchement peu réussie ! Vous allez souvent chercher des choses compliquées alors que le théorème d'encadrement fait tout le travail. ATTENTION ! Ne passez pas à la limite AVANT d'avoir invoquer le théorème qui retourne deux choses :

   - la convergence,
   - la valeur de la limite.

   Plusieurs ont affirmé $0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} 1/n$ avant d'utiliser le théorème. Cela n'a pas de sens si l'on n'a pas d'abord établi que $\lim_{n\to+\infty} u_n$ existe par le théorème d'encadrement.

9. (a) $\boxed{2\ \text{pt}}$ Soit $x \in]0; +\infty[$. Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

   Heuuuu un simple calcul de fraction qui a laissé plus du tiers d'entre vous sur le carreau...

(b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement monotone.
Assez peu de bonnes réponses alors que la question est classique dans les exercices sur les suites implicites. A revoir.

10. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$nu_n = \mathrm{e}^{-u_n}\,.$$
Facile mais bien globalement.

11. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
Une petite poignée de bonnes réponses. Attention, $\mathrm{e}^{-u_n} = 1 - u_n + o\,(u_n)$ QUE si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

12. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. En utilisant à nouveau la question 10., déterminer un équivalent simple de v_n quand $n \to +\infty$ et en déduire un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n^2}$ de u_n en $+\infty$.
Non réussie.

13. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Procéder de même pour obtenir un développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{n^3}$ de u_n en $+\infty$.
Non réussie.

Partie 3 : La série associée $\boxed{\textbf{11 pt}}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $T_n = \frac{S_n}{n}$. On admet que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons T sa limite.

14. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geqslant p+1$,
$$0 < T_n \leqslant \frac{S_p}{n} + \frac{n-p}{n}\frac{1}{p+1}.$$
Des débuts corrects mais aucune réponse complète. La question n'est pas si dure, à savoir faire.

15. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire la valeur de T.
Non réussie. Il fallait faire deux passages à la limites, sur n d'abord puis sur p.

16. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Préciser l'équation de la tangente de la fonction exponentielle en 0 et montrer que le graphe de la fonction exponentielle est au-dessus de cette tangente sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Ok pour l'équation de la tangente encore que vous n'êtes pas si nombreux à la donner et pour la position j'ai peu de bonnes réponses pourtant la question est classique et facile. Pas de DL ici car on veut la position sur $\mathbb{R}$ tout entier et non sur un petit voisinage de 0.

17. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ A l'aide de la question 10. en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \frac{1}{n+1}$.
Non réussie.

18. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ A l'aide des questions précédentes, montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ puis en déduire un équivalent de T_n quand $n \to +\infty$.
Non réussie.

Problème III - Continuité-dérivabilité

On considère l'équation suivante d'inconnue une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(\bigstar) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ [1 - f(x)f(y)]\, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Soit f une fonction vérifiant l'équation $(\bigstar)$.

Partie 1 : Préliminaires

1. On suppose dans cette question et dans cette question uniquement que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$: il existe $K \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = K$. Déterminer alors la valeur de K.

   Un lot correct de bonnes réponses mais pas assez pour le niveau très abordable de cette question. Plusieurs se trompent sur la résolution de l'équation $\left(1 - K^2\right) K = 2K$. Quelques réponses justes mais mal rédigées également.

2. On suppose à nouveau f quelconque. Montrer que $f(0) = 0$.

   Moins de réussites qu'à la question précédente. J'ai vu plusieurs fois des réponses commençant par : supposons $f(0) = 0$. Sauf en cas de raisonnement d'analyse-synthèse, ne jamais supposer le résultat pour le démontrer !

3. Démontrer que f est une fonction impaire. *Indication : on pourra poser* $y = -x$.

   Un ensemble correct. N'oubliez pas de préciser que f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0.

4. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left[1 - f(x)^2\right] f(2x) = 2f(x).$$

   Facile, bien réussie mais bizarrement pas toujours abordée. Il faut prendre les points faciles de début de sujet.

5. Montrer par l'absurde que la fonction f ne peut pas diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

   Un petit peu plus subtile mais bien réussie par nombre d'entre vous. Détaillez a minima les calculs des limites et pourquoi la conclusion est absurde.

6. Montrer que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad [1 + f(x)f(y)]\, f(x-y) = f(x) - f(y).$$

   Il suffisait de prendre $y = -y$ et d'utiliser l'imparité. Vous êtes bien plusieurs à le voir.

Partie 2 : Le cas dérivable

On suppose dans cette partie que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (1 + f(x+h)\, f(x))\, \frac{f(h)}{h}.$$

   Là aussi il suffisait de prendre de bonnes valeurs pour x et y ce qu'on fait quelques-uns mais pas beaucoup au final.

8. En déduire que f est dérivable en x et donner une expression de $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(0)$.

   Une ou deux bonnes réponses seulement alors qu'il suffisait de passer à la limite dans la question précédente... et connaitre la définition de la dérivabilité bien sûr ! C'est gênant que vous soyez si peu à maitriser cette définition. Un point important également est de bien articuler son raisonnement de la façon suivant :

- 1) la limite existe,
- 2) la fonction est donc dérivable,
- 3) on calcule la limite,
- 4) on en déduit la valeur de la dérivée.

9. On pose $\alpha = f'(0)$ et on suppose dans cette question que $\alpha > 0$.

   (a) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \geqslant \alpha.$$
   Une seule bonne réponse car il fallait avoir réussie la question précédente.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $c_x \in]0; x[$ tel que
   $$f(x) = f'(c_x)\, x.$$
   Deux trois bonnes réponses seulement. Dommage.

   (c) A l'aide de la question 5. conclure à une contradiction.
   Non réussie. Quelques tentatives erronées. Ce n'est pas parce que $f(c_x) > 0$ que sa limite est strictement positive. Déjà sa limite existe-t-elle vraiment ? Et même dans ce cas, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement positive avec une limite nulle. A travailler avec le corrigé.

On admet de même que α ne peut pas être strictement négatif et que donc nécessairement, $\alpha = 0$.

10. Conclure que $(\bigstar)$ admet une unique solution f continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0, que l'on précisera.
    Non réussie.

Partie 3 : Existence d'un zéro

On ne suppose plus que f est dérivable en 0 et on reprend le cas général d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ solution de $(\bigstar)$.
On veut montrer que f s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. On procède par l'absurde et on suppose que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \neq 0$.
On fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$.

11. On suppose que $f(a) > 0$. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) > 0$.
    Aucune bonne réponse. Il fallait penser au théorème des valeurs intermédiaires.

12. A l'aide de la question 6. montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
    Non traitée.

13. En déduire que f converge vers une limite finie que l'on note ℓ.
    Non traitée.

14. Montrer que $\ell = 0$.
    Une ou deux tentatives peu claires.

15. En déduire une contradiction.
    Idem.

De même, on montre que $f(a) < 0$ est impossible.

16. Que peut-on en déduire ?
    Une réponse incomplète.

Partie 4 : Conclusion du cas continue

Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathcal{S} = \left\{ t \in \mathbb{R}_+^* \mid f(t) = 0 \right\}$. Par la partie précédente, on sait que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ et on fixe $b \in \mathcal{S}$.

17. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $mb \in \mathcal{S}$.

    Une seule esquisse de réponse.

18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{b}{2^n} \in \mathcal{S}$.

    Non traitée.

19. En déduire que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{mb}{2^n} \in \mathcal{S}$.

    Non traitée.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{b}{2^n} \left\lfloor \frac{2^n x}{b} \right\rfloor$, où pour $t \in \mathbb{R}$, $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière de t.

20. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.

    Non traitée.

21. En déduire que $x \in \mathcal{S}$.

    Non traitée.

22. Démontrer alors que ($\bigstar$) admet une unique solution f continue sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

    Non traitée.