Commentaires du DS7
Espaces vectoriels, dimension, séries, applications linéaires

Index des raccourcis :

- TB : très bien
- AE : à encadrer
- NJ : non justifié
- PC : pas clair
- Pq ? : pourquoi ?

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{70}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1.4	P1	P2.1	P2.2	P2.3	P2.4	P2	P3.1	P3.2	P3.3	P3	Total	Note finale
Moyenne	-2,1	3,9	7,1	0,7	0,2	11,9	3,5	1,1	1,5	0	6	7,6	0,4	0,1	8,1	24,2	8,29
Sur		6	24	16	6	52	13	9	18	4	44	21	13	13	47	143	20

TOTAL : 147 pt

Problème I - Espaces vectoriels et dimension 52 pt

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit

$$u(P) = X(1-X)P' + nXP.$$

Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on pose

$$F_k = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid u(P) = kP\} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; X(1-X)P' + nXP = kP\right\}.$$

On définit également,

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad B_k = X^k (1-X)^{n-k}.$$

Enfin, on pose

$$H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(2) = 0\}.$$

L'objectif de ce problème est d'utiliser nos connaissances sur les espaces vectoriels pour déterminer les F_k.

Partie 1 : Généralités 6 pt

1. **2 pt** Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Bien pour la plupart mais beaucoup d'erreurs persistent, le raisonnement reste bien souvent bancal ou peu clair. L'appartenance de $0_{\mathbb{R}_n[X]}$ n'est pas toujours bien écrit ou compris. La stabilité par combinaison linéaire non plus. Certains commencent par supposer que $\lambda P + \mu Q \in H$. D'autres ne prennent pas P et Q dans H. A absolument consolider pour beaucoup d'entre vous.
2. **2 pt** Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Montrer que F_k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Idem que la question précédente avec la difficulté que tout le monde ne comprend pas ce que signifie $u(P) = kP$.
3. **2 pt** Rappeler $\mathscr{B}_{can}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Une majorité de bonnes réponses mais il est surprenant de voir la quantité de mauvaises réponses. Attention à faire une phrase pour répondre.

Partie 2 : Le cas $n = 2$ 24 pt

On suppose dans cette partie uniquement que $n = 2$.

4. 3 pt Déterminer une base et la dimension de H.

   Quelques bonnes réponses bien rédigées. D'autres n'y parviennent pas. Certains confondent encore un espace vectoriel avec une famille et mélangent tout entre Vect, Card, dim... La rédaction de la dimension de H quand elle est faite est cependant souvent bien faite.

5. 2 pt Pour tout $P = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$, calculer $u(P)$.

   Elémentaire et pourtant de nombreuses erreurs. Certains n'ont pas compris la question, d'autres n'ont pas pris $n = 2$ et d'autres ont eu des difficultés de calcul. Plusieurs copies se trompant lourdement ici, font du hors sujet sur toute la suite de la partie.

6. 2 pt Déterminer une base de F_0 et préciser sa dimension.

   Bien pour ceux qui ont réussi la question précédente. N'oubliez pas de justifier « par unicité des coefficients d'un polynôme ». Je rappelle qu'il n'y a pas de coefficients dans le Vect que des vecteurs. Pour le caractère libre, précisez bien que le vecteur/polynôme est non nul.

7. 3 pt Même question pour F_1 et F_2.

   Idem que la question précédente. Un ou deux se plantent complètement à la question d'avant mais réussissent mieux celle-ci.

8. 2 pt Montrer que F_0 et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

   Quelques belles réponses, qui utilisent bien la dimension mais globalement bien trop peu.

9. 2 pt Déterminer une base et la dimension de $G = F_1 + F_2$.

   Question pas très dure mais il fallait avoir réussi la question 7.

10. 2 pt Montrer que F_0 et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

    Idem que pour la question 8.

11. 2 pt A-t-on $G = H$? Justifier.

    Une seule bonne réponse. Plusieurs ont cru démontrer que $G = H$.

12. (a) 2 pt Montrer que $\mathscr{B} = (B_0, B_1, B_2)$ est libre.

    Plusieurs ont pris des B_i issus de leurs propres calculs dans les questions précédentes et ont donc fait du hors sujet. D'autres n'ont pas pris $n = 2$. Finalement très peu de bonnes réponses.

    (b) 2 pt Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

    Facile et bien dès que l'on connait son cours ce qui est le cas pour une petite poignée d'entre vous.

13. 2 pt Retrouver le résultat de la question précédente, en calculant le rang de $\mathscr{B}$.

    Parmi ceux qui ont traité la question, vous avez tous utilisé la question précédente, cela ne REdémontre rien si l'on prend le résultat de la question 12. Il faut absolument revoir comment l'on fait un calcul de rang, peut-être en avons-nous pas fait assez en classe. J'ai généreusement mis un point à ceux qui donnait bien le lien avec la dimension et le cardinal.

On suppose pour le reste du problème que $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

Partie 3 : La dimension de F_k 16 pt

On fixe $k \in [\![0;n]\!]$.

14. 3 pt Montrer que pour $p \in [\![0;n]\!]$, $B_p \in F_k \Leftrightarrow p = k$.
    Une seule tentative avec de l'idée. Ceci est une question de difficulté moyenne et non élevée.

15. 2 pt Justifier que $1 \leqslant \dim(F_k) \leqslant n$.
    Non traitée.

16. 2 pt Montrer que $H = \{(X-2)\,Q \mid Q \in E\}$ où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on précisera.

    Ok pour ceux qui la traitent.

17. 2 pt En déduire une base puis la dimension de H.
    Une petite poignée de bonnes réponses. La réponse est naturellement à bien justifier.

18. 2 pt Montrer que F_k et H sont en somme directe. *On pourra procéder par l'absurde, supposer $P \in F_k \cap H$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et noter d la multiplicité de 2 dans P.*

    Une ou deux tentatives non abouties.

19. 3 pt En déduire la dimension de F_k puis que F_k et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.
    Non réussie.

20. 2 pt Déterminer une base de F_k.
    Non traitée.

Partie 4 : Une base adaptée 6 pt

21. 2 pt Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![0;n]\!]^2$, $i \neq j$, les espaces F_i et F_j sont en somme directe.
    Quelques tentatives et une ou deux bonnes réponses quoique pas complètement rigoureuses.

22. 2 pt Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $p \in [\![0;n]\!]$, on pose $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k\, B_k$. Démontrer par récurrence que pour tout $p \in [\![0;n]\!]$,

$$S_p = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \qquad \Rightarrow \qquad \forall k \in [\![0;p]\!],\ \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}.$$

    Une ou deux tentatives non abouties.

23. 2 pt En déduire que $\mathscr{B} = (B_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
    Une ou deux bonnes réponses.

Problème II - Séries 44 pt

L'objectif de ce problème est de préciser le comportement asymptotique de $n!$:

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*, \qquad n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \gamma n^n \,\mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}.$$

Partie 1 : Harmonique un jour... 13 pt

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et $b_n = a_n - \frac{1}{n}$.

1. $\boxed{2+2 \text{ pt}}$ Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} a_k$ et en déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$.

   Beaucoup reconnaissent une somme télescopique mais pas tout le monde. D'autres se trompent dans la formule permettant de calculer la somme partielle. Pour la nature, j'ai eu beaucoup de confusions. Certains pensent que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge ce qui est faux. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge oui mais $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc il était faux de parler de divergence grossière.

2. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer un équivalent simple de b_n.

   Trop peu de bonnes réponses malgré le caractère très classique de la question. A bien revoir en cas d'erreur. Je rappelle que la somme et la composée d'équivalents sont interdites !

3. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n$.

   Assez peu de bonnes réponses car la question précédente à été assez peu réussie. Ne dites pas « c'est une série de Riemann... » mais bien « $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{-1}{2n^2}$ est une série de Riemann... » N'oubliez pas également de préciser que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{-1}{2n^2} < 0$. Plusieurs bonnes réponses.

4. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^{n} b_k$ en fonction de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   Question facile, en ayant réussi naturellement la première question.

5. $\boxed{3 \text{ pt}}$ En déduire qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + C_1 + o(1).$$

   Aucune bonne réponse. Pourtant il s'agit simplement de manipuler la définition de la somme totale.

Partie 2 : Somme de logarithmes $\boxed{9 \text{ pt}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n)$ et $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

6. $\boxed{2+2 \text{ pt}}$ Déterminer la nature de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$.

   Quelques bonnes réponses pour $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ malheureusement pratiquement aucune pour $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$. Vous êtes trop nombreux à tomber dans le piège de la convergence absolue. Petit détail qui a son importance, distinguez bien u_n de U_n.

7. $\boxed{3 \text{ pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant U_n \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n + 1 - 2\ln(2).$$

   Une poignée ont compris qu'il s'agissait de la comparaison série-intégrale mais une ou deux réponses complètes.

8. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire un équivalent simple de U_n quand $n \to +\infty$.

   Beaucoup de parachutage, très peu de réponses bien rédigées.

Partie 3 : Soyons plus précis 18 pt

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $v_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln(n) - \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k$.

9. 1 pt Rappeler l'identité des accroissements finis.

   Bien dans l'ensemble. En même temps cela fait déjà trois fois que l'on tombe sur cette question ! Il est donc incompréhensible que tous n'est pas l'intégralité du point en question.

10. 3 pt Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que pour tout $t \in [n-1; n]$,

$$\frac{n-t}{n} \leqslant \ln(n) - \ln(t) \leqslant \frac{n-t}{n-1}.$$

   Une ou deux bonnes réponses, il fallait juste appliquer le résultat précédent à $f = \ln$. Naturellement, il ne faut pas que savoir réciter les théorèmes du cours, il faut aussi savoir les appliquer.

11. 2 pt En déduire que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{2n} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2\,(n-1)}.$$

   Plusieurs bonnes réponses ici.

12. 2 pt Déterminer la nature de $(V_n)_{n\geqslant 2}$.

   Quelques bonnes réponses mais pas toujours. N'oubliez pas de parler de positivité pour le théorème de comparaison et surtout de bien comparer les termes généraux et surtout pas les sommes partielles !

13. 2 pt Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \left(v_n - \frac{1}{2n}\right)$ converge. On note S sa somme totale.

   Peu mais quelques bonnes réponses.

14. 2 pt Peut-on en déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \cos(n)\left(v_n - \frac{1}{2n}\right)$?

   Très peu de réponses correctes ou du moins correctement rédigées.

15. 2 pt Montrer qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ que l'on exprimera en fonction de C_1 et S telle que

$$V_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{2} + C_2 + o\,(1)\,.$$

   Une seule bonne réponse.

16. 2 pt A l'aide de la définition de $(v_n)_{n\geqslant 2}$, montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad V_n = U_n - n\ln(n) + n - 1.$$

   Deux trois bonnes réponses.

17. 2 pt En déduire qu'il existe $C_3 \in \mathbb{R}$ tel que

$$U_n \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + C_3 + o\,(1)\,.$$

   Non réussie.

Partie 4 : Il est temps de conclure $\boxed{4 \text{ pt}}$

18. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. Montrer que l'implication suivante est FAUSSE en général :
$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{e}^{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\beta_n}\,.$$
Non réussie.

19. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que
$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*, \qquad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma n^n \,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}.$$
Non traitée.

Problème III - Applications linéaires $\boxed{47 \text{ pt}}$

On souhaite démontrer dans ce problème que si E est un espace vectoriel de dimension finie et si $f \in \mathscr{L}(E)$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \oplus \operatorname{Im}\left(f^k\right) = E$.

Partie 1 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$ $\boxed{21 \text{ pt}}$

On pose dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ et on définit

$$f : \quad \begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\to \begin{bmatrix} 4x - y + 5z \\ -2x - y - z \\ -4x + y - 5z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Démontrer que f est linéaire.
Beaucoup de bonnes réponses mais encore bien trop de réponses peu ou pas du tout clair. Parfois vous écrivez les calculs dans le mauvais sens, montrant que vous ne comprenez pas ce que vous faites. Question parfaitement identique aux entrainements en classe.

2. (a) $\boxed{2+2 \text{ pt}}$ Déterminer l'image de f. On en déterminera une base et on spécifiera sa dimension.
Encore des confusions entre vecteur, espace vectoriel et famille. Question généreusement dotée et souvent rentabilisée mais là encore plusieurs ne savent pas résoudre cette question pourtant pratiquée un grand nombre de fois en classe.

   (b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Vérifier que $(-1, 1, 1) \in \operatorname{Ker}(f)$.
Bien globalement. Ecrire $f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ et non $f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $\boxed{3 \text{ pt}}$ Avec le moins de calculs possibles, déterminer le noyau de f. On en déterminera une base et on spécifiera sa dimension.
Deux ou trois belles réponses qui pensent bien à la dimension. Sinon vous passez majoritairement par la définition du noyau ce qui restait juste. Quelques copies ne parviennent pas à démarrer.

   (d) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Les espaces $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
Assez peu de bonnes réponses. La plupart du temps une erreur s'est déjà produite à une question précédente rendant erronée cette résolution. Quelques copies ont osé affirmer avec leurs calculs précédents que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) \neq \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. C'est dangereux de contredire un théorème du cours...

3. (a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer f^2 (on explicitera pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ son image par f^2).
Des bonnes réponses et des erreurs de calcul évitables.

(b) 2 pt Déterminer l'image de f^2, en donner une base et sa dimension.
Quelques bonnes réponses mais assez peu. Parfois la question précédente étant fausse, rend cette résolution fausse également. Parfois le calcul de l'image n'est pas compris.

(c) 2 pt Déterminer le noyau de f^2, en donner une base et sa dimension.
Idem que pour la question précédente mais pour le noyau.

(d) 2 pt Les espaces $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
Là aussi interdit de contredire le théorème du rang. Finalement peu de bonnes réponses car très souvent vous faites au moins une erreur dans les questions précédentes.

Partie 2 : Généralités en dimension quelconque 13 pt

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de f.

4. 2 pt Si $f \in GL(E)$ montrer alors que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathrm{Ker}\left(f^k\right) \oplus \mathrm{Im}\left(f^k\right) = E$.
Une belle réponses. Deux autres réponses pas claires. Non traitée sinon.

Dans la suite f est un endomorphisme quelconque (non nécessairement bijectif).

5. 2 pt Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}\left(f^{k+1}\right) \subset \mathrm{Im}\left(f^k\right)$.
Une seule bonne réponse.

6. 2 pt Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}\left(f^k\right) \subset \mathrm{Ker}\left(f^{k+1}\right)$.
Idem.

7. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathrm{Ker}\left(f^p\right) = \mathrm{Ker}\left(f^{p+1}\right)$.

(a) 2 pt Soit $x \in E$ tel que $f(x) \in \mathrm{Ker}\left(f^{p+1}\right)$. Montrer que $x \in \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$.
Non réussie.

(b) 2 pt Montrer que $\mathrm{Ker}\left(f^{p+2}\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$.
Non traitée.

(c) 3 pt En déduire que pour tout $k \geqslant p$, $\mathrm{Ker}\left(f^k\right) = \mathrm{Ker}\left(f^p\right)$.
Non traitée.

Partie 3 : Résolution en dimension finie 13 pt

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel de dimension finie et on note $n = \dim(E)$ sa dimension. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$u_k = \mathrm{rg}\left(f^k\right).$$

8. (a) 2 pt Justifier que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée.
Une ou deux bonnes réponses, non traitée sinon.

(b) 1 pt Montrer que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne à partir d'un certain rang.
Facile mais non traitée.

On pose p le premier indice à partir duquel $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ stationne. On appelle alors p **l'indice** de f.

9. 4 pt Montrer que $\mathrm{Ker}\left(f^p\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f^p\right)$ sont en somme directe.
Non traitée.

10. 2 pt En déduire par un argument de dimension que $\mathrm{Ker}\left(f^p\right) \oplus \mathrm{Im}\left(f^p\right) = E$.
Non traitée.

11. (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $y \in \operatorname{Im}(f^p)$. A l'aide de la question précédente, montrer que $y \in \operatorname{Im}\left(f^{2p}\right)$.
    Non traitée.

    (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que $\operatorname{Im}(f^p) = \operatorname{Im}\left(f^{p+1}\right)$.
    Non traitée.